

1. Магма. Полугруппа. Моноид. Группа

1. Пусть S – некоторое множество, замкнутое относительно бинарной операции (то есть результат операции над двумя элементами S также лежит в S):

$$* : S \times S \rightarrow S$$

2. > **Магма** – пара $(S, *)$

3. > **Полугруппа** – магма, для которой выполняется свойство *ассоциативности*

$$\forall a, b, c \in S \rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$$

4. > **Моноид** – полугруппа с *единичным элементом* (нейтральным)

$$a * e = e * a = a, \quad \forall a \in S$$

5. > **Группа** – моноид, для каждого элемента которого существует *обратный*

$$\forall a \in S \rightarrow \exists a^{-1} \in S : a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

6. > **Абелева группа** (коммутативная) – группа, для которой операция $*$ обладает свойством *коммутативности*

$$a * b = b * a, \quad \forall a, b \in S$$

7. ? Упражнение: Докажите, что нейтральный элемент моноида/группы, а также элемент группы, обратный данному, единственны.

2. Кольцо. Коммутативное кольцо. Поле

1. > **Кольцо** – тройка $(S, +, \times)$, где S – абелева группа относительно сложения $+$ и полугруппа относительно умножения $\times$, причём операция умножения дистрибутивна относительно сложения:

$$\forall a, b, c \in S \rightarrow a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \quad (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$$

Здесь нейтральный элемент относительно $+$ есть *ноль* 0.

1. Если в кольце S также имеется и нейтральный элемент относительно операции умножения, то он называется *единицей* 1 (тогда это *кольцо с единицей*).

2. > **Поле** – коммутативное относительно умножения $\times$ кольцо с единицей, где существует *обратный элемент* относительно $\times$

$$\forall a \neq 0 \rightarrow \exists a^{-1}$$

3. ? Упражнение: Охарактеризуйте, какими алгебраическими структурами являются следующие множества относительно стандартных операций сложения и умножения:

2. множество натуральных чисел $\mathbb{N}$;
3. множество целых чисел $\mathbb{Z}$;
4. множество неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$;
5. множество чётных целых чисел $2\mathbb{Z}$;
6. множество нечётных целых чисел $2\mathbb{Z} + 1$;
7. множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$;
8. множество действительных чисел $\mathbb{R}$;
9. множество неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_+$;
10. множество комплексных чисел $\mathbb{C}$;
11. множество матриц $n \times n$ с действительными элементами $M_n(\mathbb{R})$;
12. множество чисел $m + n\sqrt{2}$, где m и n – целые числа;
13. множество чисел $p + q\sqrt{2}$, где p и q – рациональные числа.

3. Векторное пространство. Норма

1. Пусть V – абелева группа $(\vec{x}, \vec{y})$ относительно сложения $+$, а F – поле (α, β) с нейтральным элементом 1 относительно умножения $\times$.

2. **Векторное** (линейное) **пространство** – набор $(V, F, +, \times)$, где V – векторы, F – скаляры, а умножение $F \times V \rightarrow V$ согласно аксиомам:

$$\begin{aligned}\alpha \times (\beta \times \vec{x}) &= (\alpha * \beta) \times \vec{x} \\ 1 \times \vec{x} &= \vec{x} \\ (\alpha + \beta) \times \vec{x} &= \alpha \times \vec{x} + \beta \times \vec{x} \\ \alpha \times (\vec{x} + \vec{y}) &= \alpha \times \vec{x} + \alpha \times \vec{y}\end{aligned}$$

3. ? Упражнение: докажите следующее

1. $(-\alpha) \times \vec{x} = -(\alpha \times \vec{x})$ для $\forall \alpha \in F, \forall \vec{x} \in V$
2. $\alpha \times \vec{0} = \vec{0}$ для $\forall \alpha \in F$
3. $0 \times \vec{x} = \vec{0}$ для $\forall \vec{x} \in V$

4. Далее, будем опускать знак умножения: $\alpha \times \vec{x} \rightarrow \alpha \vec{x}$

5. **Базис** векторного пространства - множество векторов $\{\vec{x}_i\}$ (конечное или бесконечное), такое, что любой другой вектор пространства *однозначно представляется* в виде линейной комбинации конечного подмножества базиса

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$$

4. **Мощность** базиса - количество векторов в базисе $\{\vec{x}_i\}$.

5. Базис существует в любом векторном пространстве, причём его мощность определяется однозначно. Если множество базисных векторов конечно, пространство называют конечномерным, а число базисных векторов – размерностью пространства.

6. **Норма** – функционал $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий аксиомам

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| = 0 &\rightarrow \vec{x} = \vec{0}, \\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in V &\rightarrow \|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \\ \forall \alpha \in F, \vec{x} \in V &\rightarrow \|\alpha \vec{x}\| = |\alpha| \|\vec{x}\|\end{aligned}$$

6. Тогда пространство V называется *нормированным*.

7. В первой аксиоме доказывается двунаправленность: $\|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

4. Метрическое пространство. Метрика, порождённая нормой

1. **Метрика** – числовая функция $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, обобщающая понятие расстояния и удовлетворяющая аксиомам:

1. тождества: $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. симметричности: $d(x, y) = d(y, x)$
3. треугольника: $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$

2. **Метрическое пространство** – множество с метрикой (X, d)

3. ? Упражнение: Докажите, что метрика – это неотрицательная функция, то есть $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$.

4. ? Упражнение: Покажите, что если слегка модифицировать аксиому треугольника, записав её как $d(x, z) \leq d(y, x) + d(y, z)$, то аксиома симметричности становится избыточной и выводится из двух других.

5. В нормированном векторном пространстве V всегда можно ввести метрику $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, которая порождается нормой: $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$.

6. **Пространства Минковского** – конечномерные векторные пространства, в которых введена *порождённая нормой* метрика.

7. ☹ Пример: дискретная метрика не индуцируется никакой нормой: $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$

8. **Предел последовательности** (сходящейся) $\{x_1, \dots\}$ – такой элемент x^* , что

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall n > N \rightarrow d(x_n, x^*) < \varepsilon$$

9. **Фундаментальная** последовательность (последовательность Коши):

$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N : \forall m, n > N \rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

10. **Полное** пространство – метрическое пространство, где *любая* фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу из этого пространства

11. **Банахово** пространство – полное нормированное пространство

5. Скалярное произведение. Евклидово пространство

1. **Скалярное произведение** – операция $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая аксиомам:

1. билинейность: $(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{z}) = \alpha(\vec{x}, \vec{z}) + \beta(\vec{y}, \vec{z})$
2. симметричность: $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$
3. положительная определённость: $(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0, \quad (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$

2. **Евклидово пространство** – конечномерное вещественное пространство со скалярным произведением

3. **Длина** вектора: $|\vec{x}| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$

4. **Неравенство** Коши-Буняковского-Шварца:

1. $\hookrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$

2. Доказательство:

1. $\square \quad (\lambda \vec{x} + \vec{y}, \lambda \vec{x} + \vec{y}) \geq 0 \quad \forall \lambda$

2. Решаем квадратичное уравнение: $\lambda^2 (\vec{x}, \vec{x}) + 2\lambda (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{y}, \vec{y}) \geq 0 \quad \blacksquare$

3. Следствие: неравенство треугольника $|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$

5. **Теорема** Йордана-фон Неймана:

1. $\hookrightarrow$ В $\forall$ векторном пространстве над полем действительных или комплексных чисел норм может порождаться скалярным произведением $\iff$ справедливо тождество параллелограмма

$$||\vec{x} + \vec{y}||^2 + ||\vec{x} - \vec{y}||^2 = 2(||\vec{x}||^2 + ||\vec{y}||^2)$$

2. Замечание: для вещественных нормированных пространств: $(\vec{x}, \vec{y}) = \left\| \frac{\vec{x} + \vec{y}}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{\vec{x} - \vec{y}}{2} \right\|^2$

6. **Гильбертово пространство** – банахово пространство, норма которого порождена скалярным произведением

6. Топология. Топологическое пространство. База топологии

1. Пусть X – некоторое множество, а T – система подмножеств X такая, что

1. в неё входят пустое множество $\emptyset$ и само множество X ;
2. если в неё входят подмножества $U_\alpha, \quad \alpha \in A$, то входит и их объединение $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$;
 1. A – некоторое, вообще говоря, *несчётное* множество индексов
3. если в неё входят подмножества $U_i, \quad i = 1 \dots n$, то входит и их пересечение $\bigcap_{i=1}^n U_i$.

2. Система T - **топология**

3. **Открытое** множество – множество из T

4. **Топологическое пространство** – пара (X, T) . Элемент топологического пространства именуют точкой

5. $\odot$ Пример: $\{\emptyset, X\}$ – тривиальная топология

6. $\odot$ Пример: $\{\emptyset, X, S\}$ – где S – некоторое подмножество X , тоже является топологией.

7. **База** (или базис) топологии – это такая совокупность открытых подмножеств топологического пространства, из которых остальные открытые подмножества могут быть получены *операцией объединения* (вообще говоря, несчётного).

8. **Пример:** на числовой прямой в качестве базы топологии можно взять совокупность всех интервалов: $(x_1, x_2), x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$.

9. **Пример:** в метрическом пространстве имеется естественная топология с базой в виде *открытых шаров*: $B(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in X \mid d(\vec{x}, \vec{y}) < r\}$

10. **Дискретная топология** 2^X – топология на множестве X , в которой открыты все его подмножества / совокупность всех подмножеств множества X , каждая точка X является открытым подмножеством.

1. Базой дискретной топологии служит совокупность всех *синглтонов* (одноточечных подмножеств).

11. **Замкнутое** подмножество V топологического пространства – это множество, дополнение к которому $U = X \setminus V$ является *открытым*.

12. **Упражнение:** докажите, что если в качестве базы топологии в метрическом пространстве взять замкнутые шары $\bar{B}(\vec{x}, r) = \{\vec{y} \in X \mid d(\vec{x}, \vec{y}) \leq r\}$, то такая топология совпадает с дискретной.

13. Любое подмножество произвольного топологического пространства принадлежит к одному из четырёх классов:

1. открытые множества;
2. замкнутые множества;
3. открыто-замкнутые множества; (например, пустое множество $\emptyset$ или всё топологическое пространство X)
4. ни открытые, ни замкнутые множества.

14. **Упражнение:** приведите пример: а) ни открытого, ни замкнутого множества; б) нетривиального открыто-замкнутого множества.

15. На любом подмножестве S топологического пространства (X, T) можно определить топологию $T_S = \{U \cap S \mid U \in T\}$. Говорят, что заданная топология *индуцирована* топологией T .

7. Понятие окрестности. Первая и вторая аксиомы счётности

1. **Окрестность** $U(\vec{x})$ точки $\vec{x} \in V - \forall$ открытое подмножество, содержащее эту точку

2. **Выколотая окрестность:** $\dot{U}(\vec{x}) = U(\vec{x}) \setminus \{\vec{x}\}$

1. Выколотая окрестность может быть не открытым подмножеством

3. **Стандартная окрестность** в метрическом пространстве – открытый шар с центром в $\vec{x}$

4. **Локальная база** – набор окрестностей точки таких, что $\forall$ окрестность содержит хотя бы одну окрестность локальной базы

5. **Первая аксиома** счётности:

1. $\hookrightarrow$ Система окрестностей $\forall$ точки пространства имеет счётную локальную базу

6. **Вторая аксиома** счётности:

1. $\hookrightarrow$ Пространство имеет счётную базу топологии

7. Если пространство удовлетворяет 2-й аксиоме, то удовлетворяет 1-й аксиоме.

1. Обратное неверно. Контрпример: несчётное пространство (множество из несчётного количества элементов) с дискретной топологией.

8. Внутренность и граница множества. Сепарабельность

1. Рассмотрим подмножество $S \subset X$

2. | **Внутренняя** точка $x \in S$ – такая, что $\exists U(x) \subset S$

1. Внутренность множества $\text{Int}(S)$ – множество всех внутренних точек S
2. Очевидно, у открытого множества любая точка является внутренней, поскольку тогда оно может быть представлено как объединение всех окрестностей, с которыми точки множества в него входят:
 $S = \text{Int}(S)$

3. | **Граничная** точка $x \in S$ – такая, что в $\forall U(x)$ есть принадлежащие и не принадлежащие S точки

1. Граница множества ∂S – множество всех его граничных точек
 2. Граница множества ∂S является одновременно и границей его дополнительного множества $\partial(X \setminus S)$
4. Любая точка множества является либо внутренней, либо граничной. Справедливо соотношение, описывающее разбиение топологического пространства:

$$X = \text{Int}(S) \cup \partial S \cup \text{Int}(X \setminus S)$$

1. Следствие: замкнутость замыкания $\bar{S} = \text{Int}(S) \cup \partial S$

5. Поскольку $\overline{X \setminus S} = \text{Int}(X \setminus S) \cup \partial S$, получаем соотношение $\partial S = \bar{S} \cap \overline{X \setminus S}$. Из него вытекает *замкнутость границы*: дополнение к пересечению двух замкнутых множеств есть объединение их открытых дополнений и потому открыто.
6. Если множество S замкнуто, то его дополнение открыто и не может содержать граничных точек общей границы. Поэтому все они должны принадлежать множеству S . И наоборот, если все граничные точки множества S ему принадлежат, то они не будут принадлежать его дополнению, которое будет состоять лишь из внутренних точек и, следовательно, будет открыто. Значит, множество S должно быть замкнутым. В итоге, получаем эквивалентное определение замкнутого множества

$$S \text{ – замкнуто} \iff \partial S \subseteq S$$

7. ? Упражнение: покажите, что:

1. $\overline{\bar{S}} = \bar{S}$
2. $\partial \text{Int}(S) = \partial \bar{S} = \partial S$
3. $\partial \partial S \subseteq \partial S$

8. | Множество A называется **плотным** в множестве B , если $\forall$ окрестность $\forall$ точки $x \in B$ содержит хотя бы одну точку из A

1. Это эквивалентно $B \subset \bar{A}$

9. | Множество A **всюду плотно** (т.е. плотно в пространстве X), если $\bar{A} = X$

10. | Топологическое пространство X **сепарабельно**, если оно содержит счётное всюду плотное подмножество S

1. Пространство со счётной базой сепарабельно: если взять по одной точке из каждого множества базы, получим всюду плотное множество.

11. ☉ Пример: $\mathbb{R}$ со стандартной топологией – сепарабельное пространство: в качестве счётного всюду плотного множества можно взять множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$

12. ? Упражнение: приведите пример несепарабельного пространства.

13. Сепарабельные метрические пространства всегда обладают счётной базой.

1. В качестве неё можно взять множество открытых шаров радиуса $1/n$, $n \in \mathbb{N}$ с центром в точках счётного всюду плотного множества, которое существует в силу сепарабельности пространства.
2. Сепарабельные пространства общего вида не всегда имеют счётную базу

14. ☉ Пример: прямая Зоргенфрея – вещественная прямая с базой топологии в виде $[a, b)$

1. Не имеет счётной базы, хотя сепарабельно: $\mathbb{Q}$ плотно на прямой
2. База не удовлетворяет 2-й аксиоме счётности

9. Изолированные и предельные точки

1. Точка $x \in S$ называется **изолированной**, если $\exists \dot{U}(x) : \dot{U}(x) \cap S = \emptyset$
2. Точка $x \in S$ называется **предельной** (точной сгущения), если $\forall \dot{U}(x) \rightarrow \dot{U}(x) \cap S \neq \emptyset$
 1. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ все изолированные точки являются граничными, а внутренние точки – предельными.
 2. В любом множестве любая точка множества является либо изолированной, либо предельной
3. ? Упражнение: приведите пример топологического пространства, в котором:
 1. внутренние точки не являются предельными (более того, последние отсутствуют);
 2. изолированные точки не являются граничными (более того, последние отсутствуют).

10. Связность и компактность топологического пространства

1. Топологическое пространство **связное**, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся открытых множеств
2. Подмножество $S \subset X$ **связное**, если (S, τ_S) – связное топологическое пространство
 1. τ_S – топология, индуцированная топологией τ
3. **Область** – связное открытое подмножество
4. **Компакт** (компактное пространство) – пространство, где в $\forall$ покрытии открытого множества найдётся конечное покрытие
5. Подмножество топологического пространства называется **компактным**, если относительно индуцированной топологии оно является компактом.
6. Метрические пространства удовлетворяют 1-й аксиоме счётности
7. Компактные метрические пространства удовлетворяют 1-й и 2-й аксиомам счётности
8. Метрическое пространство компактно $\iff$ любая последовательность точек содержит сходящуюся подпоследовательность.
9. Подмножество евклидова пространства является компактным $\iff$ оно *замкнуто и ограничено*, то есть содержится в шаре конечного радиуса

11. Аксиомы отделимости для топологических пространств

1. Произвольные топологические пространства по своим свойствам могут быть чрезвычайно непохожи на привычные нам метрические пространства. Упорядочить все топологические пространства по свойствам топологического различия их точек и подмножеств можно при помощи системы *аксиом отделимости* (T_i - нем. Trennungsaxiom).
2. **Аксиома** Колмогорова T_0 :
 1. $\hookrightarrow \forall$ две различные точки пространства **топологически различимы** (т.е. хотя бы одна из точек имеет окрестность, не содержащую другую)
3. **Аксиома** Фреше-Тихонова T_1 :
 1. $\hookrightarrow \forall$ две различные точки **разделимы** (т.е. у каждой из 2 точек есть окрестность, не содержащая другую)
 2. Если X есть T_1 -пространство, то оно и T_0 -пространство
4. **Аксиома** Хаусдорфа T_2 :
 1. $\hookrightarrow \forall$ две различные точки топологического пространства имеют непересекающиеся окрестности (тогда пространство **хаусдорфовое**)
 2. Если X есть T_2 -пространство, то оно и T_1 -пространство
5. **Аксиома** T_4 :
 1. $\hookrightarrow \forall$ два замкнутых непересекающихся подмножества пространства имеют непересекающиеся окрестности (тогда пространство **нормальное**)

2. Если X есть T_4 -пространство, то оно и T_2 -пространство
6. Метрические пространства удовлетворяют всем этим аксиомам отделимости
7. ? Упражнение: на основе множества из двух элементов постройте два топологических пространства:
 1. не удовлетворяющее аксиоме T_0
 2. удовлетворяющее аксиоме T_0 , но не удовлетворяющее аксиоме T_1

12. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Гомотопия

1. Рассмотрим отображение $f : X \rightarrow Y$ топологического пространства (X, T_X) в топологическое пространство (Y, T_Y)
2. Непрерывное отображение: прообраз любого открытого множества открыт

$$\forall V \in T_Y \rightarrow f^{-1}(V) \in T_X$$
 (при непрерывном отображении образ граничной точки – это тоже граничная точка)
3. ? Упражнение: докажите, что в данном выше определении непрерывного отображения можно без потери общности вести речь только об открытых множествах из баз этих пространств.
4. Непрерывное в точке x отображение: прообраз $f^{-1}(V)$ (функции $y = f(x)$, $x \in X, y \in Y$) каждой окрестности $V(y) \subseteq Y$ точки y является некоторой окрестностью $U(x) \subseteq X$ точки x .
5. Поскольку открытое множество является окрестностью для всех своих точек, отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно в каждой точке пространства X тогда и $\iff$ оно непрерывно.
6. Если отображения $f_1 : X \rightarrow Y$, $f_2 : Y \rightarrow Z$ непрерывны, то их композиция $f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ тоже непрерывна.
7. Непрерывный образ связного множества связан. Непрерывный образ компактного множества компактен.
8. Гомеоморфизм - непрерывное взаимно однозначное отображение $f : X \rightarrow Y$ одного пространства в другое, обратное к которому f^{-1} тоже непрерывно. Тогда топологические пространства X и Y называются гомеоморфными или топологически эквивалентными: $X \simeq Y$.
9. ? Упражнение: приведите какой-нибудь пример непрерывного взаимно однозначного преобразования, которое, однако, не является гомеоморфизмом.
10. Гомеоморфность, как бинарное отношение между топологическими пространствами, является *отношением эквивалентности*, то есть обладает свойствами:
 8. рефлексивности $X \simeq X$
 9. симметричности $X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$
 10. транзитивности $X \simeq Y, Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$
11. Пусть теперь есть однопараметрическое семейство непрерывных отображений $h_t : X \rightarrow Y$ топологического пространства (X, T_X) в топологическое пространство (Y, T_Y) . Параметр t будем считать без ограничения общности пробегающим отрезок $[0, 1]$, причём непрерывное отображение h_0 , с которого начинается однопараметрическое семейство, обозначим как f , а непрерывное отображение h_1 , которым оно заканчивается, обозначим g .
12. Отображения f и g *гомотопны*, если семейство *непрерывно* (то есть если непрерывным является отображение $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$). Само же отображение H называют *гомотопией* между f и g . Гомотопность, как бинарное отношение, введённое на множестве всех непрерывных отображений между двумя топологическими пространствами, является отношением эквивалентности.
13. Два топологических пространства X и Y называют *гомотопически эквивалентными*, если существуют такие непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$, что их композиция $g \circ f$ гомотопна тождественному преобразованию id_X пространства X , а композиция $f \circ g$ гомотопна тождественному преобразованию id_Y пространства Y . Отображения f и g тогда именуются *гомотопически обратными*. Очевидно, что для гомеоморфизма гомотопически обратным отображением является обратное. Как следствие, топологически эквивалентные пространства являются гомотопически эквивалентными. Обратное неверно.

14. ? Упражнение: Убедитесь, что пространство $\mathbb{R}^n$ стягивается в точку, то есть гомотопически эквивалентно пространству-синглтону (пространству, состоящему из одной точки).
15. ? Упражнение: Продемонстрируйте, что n -мерное координатное пространство с выколотой точкой $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно $(n - 1)$ -мерной сфере S^{n-1} .