Устойчивость стационарных движений механической системы

Рассмотрим натуральную систему. Из конца 1-го семестра: уравнения Лагранжа можно представить в виде $\ddot{\vec{q}} = \Phi(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ (можно n уравнений 2-го порядка привести $2n$ уравнениям 1-го порядка).

Напоминание

Натуральная система: $L = \frac{1}{2}\Big(A(\vec{q}), \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big) - \Pi(\vec{q})$.

Напоминание

$\vec{q} = \vec{q}_0$ – положение равновесия $\iff$ $\vec{q}$ – критическая точка потенциальной энергии $\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{q}}\Big|_{\vec{q}=\vec{q}_0} = 0$.

Равновесие устойчиво тогда, когда при малом отклонении от равновесия система остаётся в его окрестности. Но отклонение теперь на фазовой плоскости.

Определение

Равновесие $\vec{q} = \vec{q}_0$ устойчиво по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad |\vec{q}(0) - \vec{q}_0|^2 + |\dot{\vec{q}}(0)|^2 < \delta \quad \to \quad |\vec{q}(t) - \vec{q}_0|^2 + |\dot{\vec{q}}(t)|^2 < \varepsilon \quad \forall t > 0.$$

Проблема в том, что слагаемые $|\vec{q}(t) - \vec{q}_0|^2$ и $|\dot{\vec{q}}(t)|^2$ имеют разную размерность. Можно поставить нормы – все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны. Далее просто считаем, что перед вторым коэффициентом стоит размерная единица.

Теорема Лагранжа-Дирихле

Точка строгого локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым по Ляпунову равновесием этой системы

$$\vec{q}_0 = \text{строгий локальный } \min \ \Pi(\vec{q}) \quad \to \quad \vec{q} = \vec{q}_0 - \text{устойчиво}.$$

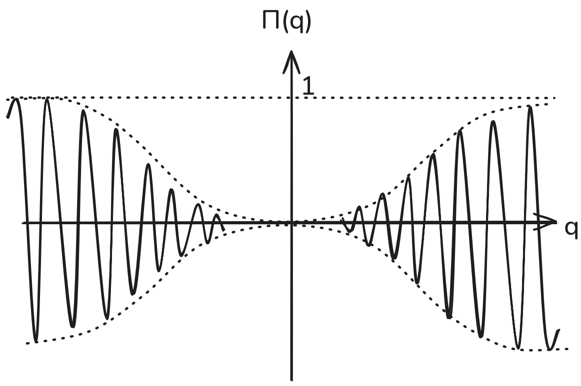
Доказательство

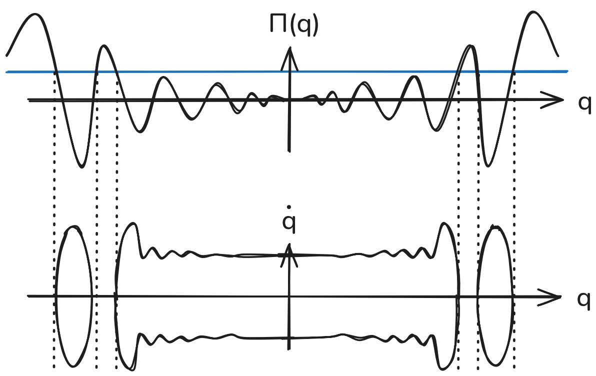
https://youtu.be/4AmyoqwsTK8?si=2N_0yw4omOk-hNPc&t=3644

Пример Уинтнер

(когда равновесие устойчиво, но строгим локальным минимумом не является)

$$\Pi(q) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|q|}} \cos\frac{1}{|q|}, & q \neq 0 \\ 0, & q = 0. \end{cases}$$





1. $q = 0$ – не строгий локальный минимум – в любой окрестности нуля есть отрицательные значения.
2. $q = 0$ – устойчиво
   $H = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + \Pi(q) = h = \text{const}$
   $\dot{q} = \pm\sqrt{h - \Pi(q)}\sqrt{\frac{1}{a(q)}}$

[**Влияние гироскопических и диссипативных сил на устойчивость**]()

Будем рассматривать натуральные системы $L = T_2 - \Pi(\vec{q}) = \frac{1}{2}\Big(A(\vec{q}), \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big) - \Pi(\vec{q})$.
Пусть есть непотенциальные силы $\vec{Q} = \vec{Q}^*$, тогда уравнение движения системы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}, \quad \vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$$

Напоминание

Силы $\vec{Q}$ **гироскопические**, если $(\vec{Q}, \dot{\vec{q}}) = 0 \ \ \forall \dot{\vec{q}}$

Напоминание

Силы $\vec{Q}$ **диссипативные**, если $(\vec{Q}, \dot{\vec{q}}) \le 0 \ \ \forall \dot{\vec{q}}$

Напоминание

Силы $\vec{Q}$ обладают **полной диссипацией**, если $(\vec{Q}, \dot{\vec{q}}) < 0 \ \ \forall \dot{\vec{q}} \neq 0$

Пусть система Лагранжева $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$.
В самом общем виде лагранжиан разбивается на $L = T_2 + T_1 + T_0 - \Pi(\vec{q})$. Рассмотрим $\tilde{L} = T_2 = \Pi^*$, где $\Pi^* = T_0 - \Pi(\vec{q})$.
Тогда $L = \tilde{L} + T_1$. Вспомним, что T_1 – линейная форма по обобщённым скоростям $T_1 = \Big(\vec{B}(\vec{q}), \dot{\vec{q}}\Big)$.
Подставим лагранжиан в уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}, \quad \vec{Q} = -\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T_1}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T_1}{\partial \vec{q}}\right)$$

$\vec{Q}$ линейно зависит от $\dot{\vec{q}}$ в силу вида T_1; тогда можно представить в виду $\vec{Q} = -B(\vec{q})\dot{\vec{q}}$, где B – некая матрица.
Любая матрица B раскладывается на симметричную и кососимметричную:

$$B(\vec{q}) = \Gamma(\vec{q}) + \Phi(\vec{q}), \quad \Gamma = \frac{1}{2}(B - B^T) = -\Gamma^T, \quad \Phi = \frac{1}{2}(B + B^T) = \Phi^T.$$

Матрица Γ соответствует *гироскопическим* силам:

$$\Big(\Gamma(\vec{q})\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big) = 0.$$

Матрица Φ соответствует *диссипативным* силам: $\frac{1}{2}\Big(\Phi(\vec{q})\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big)$ – квадратичная форма, которая называется *функцией Релея*

$$\Big(\Phi(\vec{q})\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big) = 2R.$$

Теорема Кельвина-Четаева 1

Точка строгого локального минимума потенциальной энергии натуральной системы является устойчивым положением равновесия даже при добавлении гироскопических и/или диссипативных сил.
Если равновесие изолировано и диссипативные силы обладают полной диссипацией, то равновесие устойчиво асимптотически.

Доказательство

https://youtu.be/N044EPQxGuI?si=uU3P8ChlNIl8ewT_&t=742

Теорема Кельвина-Четаева 2

Если в изолированном положении равновесия потенциальная энергия не имеет даже нестрогого минимума, а диссипативные силы обладают полной диссипацией, то равновесие неустойчиво (вне зависимости от наличия гироскопических сил).

Доказательство

https://youtu.be/N044EPQxGuI?si=1MCnfpaj7Rc568V_&t=1330

Пример

(когда за счёт гироскопических сил неустойчивое положение равновесия становится устойчивым – *гироскопическая стабилизация*)

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad \Pi = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

Из-за максимума Π в $(0,0)$ система явно неустойчива в точке.

Добавим обобщённые силы $\vec{Q} = \alpha\dot{y}\vec{e}_x - \alpha\dot{x}\vec{e}_y$.

Уравнения Лагранжа: $\begin{cases} \ddot{x} - x = \alpha\dot{y} \\ \ddot{y} - y = -\alpha\dot{x} \end{cases}$

Характеристическое уравнение: $\det(A\lambda^2 + B\lambda + C) = \det\begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & -\alpha\lambda \\ \alpha\lambda & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} = \lambda^4 + (\alpha^2 - 2)\lambda^2 + 1 = 0.$

Случай $\alpha^2 = \frac{9}{4}:\ \ \lambda^2 = \{-2, -\frac{1}{2}\}$. Положение равновесия устойчиво, но не асимптотически.