Уравнения движения в оскулирующих элементах

Система координат

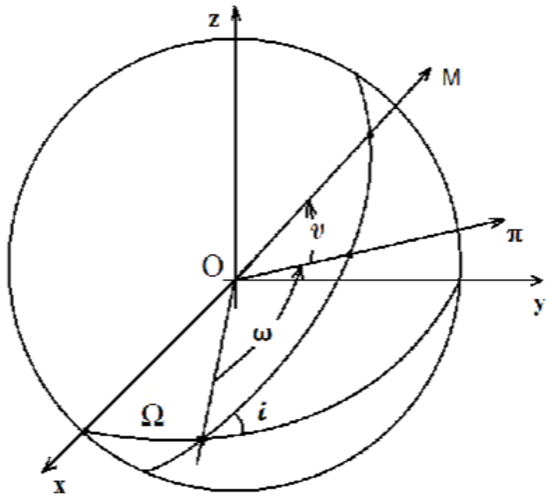

Рис. 6.1. Сферическая система координат

1. Точка пересечения кругов – восходящий узел орбиты
2. π – перицентр, M – мгновенное положение небесного тела
3. Ω – долгота восходящего узла
4. i – наклонение орбиты
5. ω – аргумент перицентра
6. ν – истинная аномалия
7. $u = \omega + \nu$ – аргумент широты
8. Связь с декартовыми координатами:

$$x = r(\cos\Omega\cos u - \sin\Omega\sin u\cos i)$$
$$y = r(\sin\Omega\cos u + \cos\Omega\sin u\cos i)$$
$$z = r\sin u\sin i$$

Величины $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ – константы первых интегралов движения

Оскулирующие элементы

Переход от обычного (в декартовых координатах) представления траектории к новому имеет смысл лишь в тех случаях, когда возмущающие ускорения с компонентами X, Y, Z много меньше «основного» X_0, Y_0, Z_0. В этих случаях задание шести элементов $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ позволяет получить не только точные координаты и скорость КА для некоторого момента времени t, но и в силу малости возмущений – приближенный вид траектории его движения на достаточно большом интервале значений t.

Геометрически истинная траектория получается в последнем случае как огибающая мгновенных конических сечений, каждое такое коническое сечение называется **оскулирующим** (касательным), шесть элементов $\Omega, i, \omega, p, e, \tau$ – **оскулирующими** элементами, а t – моментом (эпохой) оскуляции.

Основная операция. Пусть $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C$ – первый интеграл кеплерова движения. Тогда если $C = \mathrm{const}$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}X_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{y}}Y_0 + \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}Z_0 = 0,$$

а при изменной $C \neq \mathrm{const}$ получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(X_0+X)+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}(Y_0+Y)+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}(Z_0+Z)=\frac{dC}{dt}$$

$$\frac{dC}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}X+\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}Y+\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}Z$$

Таким образом, от декартовой системы уравнений переходим к системе изменения первых интегралов.

Система уравнений движения в оскулирующих переменных:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\Omega}{dt} &= \tfrac{r}{\sqrt{\mu p}}\tfrac{\sin u}{\sin i}W,\\
\tfrac{di}{dt} &= \tfrac{r}{\sqrt{\mu p}}\cos uW,\\
\tfrac{dp}{dt} &= 2rT\sqrt{\tfrac{p}{\mu}},\\
\tfrac{de}{dt} &= \sqrt{\tfrac{p}{\mu}}S\sin\nu+\sqrt{\tfrac{p}{\mu}}T(1+\tfrac{r}{p})\cos\nu+e\tfrac{r}{\sqrt{\mu p}}T,\\
\tfrac{d\omega}{dt} &= \tfrac{1}{e}[-\sqrt{\tfrac{p}{\mu}}S\cos\nu+\sqrt{\tfrac{p}{\mu}}T(1+\tfrac{r}{p})\sin\nu-e\tfrac{r}{\sqrt{\mu p}}W\sin u\cot i],\\
\tfrac{d\tau}{dt} &= \tfrac{r^2}{e\mu}\left[-(\cos\nu-eN\sin\nu)S+\tfrac{p}{r}NT)\right],
\end{aligned}$$

где $N(\nu)=2\frac{p^2}{r^2}\int_0^\nu\frac{\cos\nu d\nu}{(1+e\cos\nu)^3}$, а возмущающее ускорение разложено на $S, T, W:$ S вдоль $\vec{r}$, T перпендикулярно $\vec{r}$, W перпендикулярно мгновенной плоскости орбиты.

Выше считается $\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}\left(1-\frac{r^3}{\mu p}W\mathrm{ctg}i\sin\nu\right)$. Для малых значений W используем $\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2}$, и перейдём к приближённой системе:

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\Omega}{du} &= \tfrac{r^3}{\mu p}\tfrac{\sin u}{\sin i}W,\\
\tfrac{di}{du} &= \tfrac{r^3}{\mu p}\cos uW,\\
\tfrac{dp}{du} &= \tfrac{2r^3}{\mu}T,\\
\tfrac{de}{du} &= \tfrac{r^2}{\mu}\left[S\sin\nu+(1+\tfrac{r}{p})T\cos\nu+\tfrac{er}{p}T\right],\\
\tfrac{d\omega}{du} &= \tfrac{r^2}{e\mu}\left[-S\cos\nu+(1+\tfrac{r}{p})T\sin\nu-\tfrac{er}{p}W\sin u\cot i\right].
\end{aligned}$$