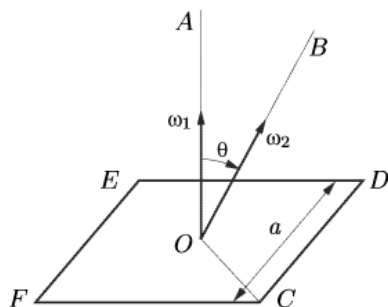


Теоремх задачи, § 4. Движение твёрдого тела с неподвижной точкой. Общий случай движения твёрдого тела

Задача 4.5

Квадратная пластина со стороной a вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг своей оси симметрии OA , которая в свою очередь вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси OB , образуя с ней постоянный угол θ . Найти скорости и ускорения точек C, D, E, F пластины в тот момент, когда прямые OA, OB, OC лежат в одной плоскости.



1. Решение:

1. Рассмотрим движение относительно полюса O – полюс неподвижен $\vec{v}_O = 0$. Тогда $\vec{\omega}_1$ – относительная, $\vec{\omega}_2$ – переносная.
2. $\vec{v}_F = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{OF}$, причём $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ из-за того, что тело вращается вокруг 2 пересекающихся осей (OA, OB)
3. Выберем базис: $Ox \parallel OF, Oy \parallel OC, Oz \parallel OA$. Тогда

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \sin \theta \\ \omega_2 \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \sin \theta \\ \omega_1 + \omega_2 \cos \theta \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{v}_F = \vec{\omega} \times \vec{r}_{OF} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_2 \sin \theta \\ \omega_1 + \omega_2 \cos \theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a\sqrt{2}}{2}(\omega_1 + \omega_2 \cos \theta) \\ -\frac{a\sqrt{2}}{2}\omega_2 \sin \theta \end{bmatrix}$$

4. Ускорение считаем по формуле $\vec{w} = \vec{w}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{OF} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}_{OF}]$
5. Как найти $\vec{\varepsilon}$? Производная вектора – скорость его конца. Вектор $\vec{\omega}$ будет вращаться вокруг оси OB со скоростью ω_2 . Тогда

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega} = \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_1.$$

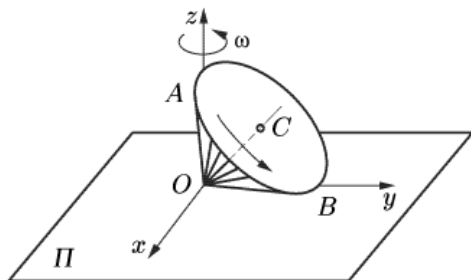
Формально это выводится из теоремы об абсолютной и относительной производной.

6. С другой стороны, в плоскости OAB конец вектора $\vec{\omega}$ неподвижен

2. Ответ:

Задача 4.8

Плоскость Π вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно неподвижной оси Oz , перпендикулярной плоскости Π . Прямой круговой конус с углом раствора 90° при вершине катится по плоскости Π без скольжения так, что его вершина O неподвижна, а скорость центра C основания относительно плоскости равна \vec{v} . Найти мгновенную угловую скорость Ω и угловое ускорение ε конуса, если $\vec{OB} = 1$.



1. Решение:

2. Ответ: