Теормех задачи, § 1. Движение точки

Задача 1.1

Точка движется так, что во всё время движения её ускорение направлено к неподвижному центру O. Показать, что траектория точки лежит в плоскости, проходящей через центр O.

1. Решение:
    1. Очевидно, радиус-вектор и вектор ускорения точки $\vec{r}, \vec{w}$ коллинеарные – один направлен от O к точке, второй от точки к O. Существует единичный вектор $\vec{e}_\xi$, коллинеарный $\vec{r}, \vec{w}$.
    2. Если вектор скорости точки $\vec{v}$ коллинеарен $\vec{e}_\xi$, то для $\forall$ системы координат $O\vec{e}_\xi\vec{e}_\eta\vec{e}_\zeta$ траектория точки лежит на прямой $O\vec{e}_\xi$.
    3. Если вектор скорости точки $\vec{v}$ не коллинеарен $\vec{e}_\xi$, то существует единичный вектор $\vec{e}_\zeta$, ортогональный $\vec{v}, \vec{e}_\xi$. В системе отсчёта система отсчёта $O\vec{e}_\xi\vec{e}_\eta\vec{e}_\zeta$ траектории движения лежат в плоскости $O\vec{e}_\xi\vec{e}_\eta$.

Задача 1.2

Электрон в постоянном магнитном поле движется по винтовой линии в соответствии с уравнениями (1). Найти тангенциальную и нормальную компоненты ускорения электрона и радиус кривизны его траектории.

$$x = a\cos\omega t, \quad y = a\sin\omega t, \quad z = bt. \quad (1)$$

1. Решение:
    1. Покомпонентно дифференцируем радиус-вектор: $\vec{r} = \begin{bmatrix} a\cos\omega t \\ a\sin\omega t \\ bt \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -a\omega\sin\omega t \\ a\omega\cos\omega t \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} -a\omega^2\cos\omega t \\ -a\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{bmatrix}$.
    2. Единичные векторы тангенциали: $\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \vec{v}/|\vec{v}|$ и нормали: $\vec{n} = \frac{\vec{\tau}'}{|\vec{\tau}'|} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{1}{|\vec{\tau}'|}$
    3. Из формул Френе следует, что ускорение раскладывается на тангенциальную и нормальную компоненты: $\vec{w} = w_\tau\vec{\tau} + w_n\vec{n}$.
    4. Тангенциальная компонента: $w_\tau = (\vec{w}, \vec{\tau}) = \frac{1}{|\vec{v}|}\left[a\omega^2\sin\omega t\cos\omega t - a\omega^2\sin\omega t\cos\omega t + 0\right] = 0$.
    5. Значит, нормальная компонента есть $w_n = |\vec{w}| = \sqrt{a^2\omega^4\cos^2\omega t + a^2\omega^4\sin^2\omega t} = a\omega^2$.
2. Ответ: $w_\tau = 0, \quad w_n = a\omega^2$.

Задача 1.3 не доделана

В поле отталкивающего центра точка движется в плоскости xy по закону (1), где $\alpha, \beta, \gamma\rho, \omega$ – постоянные величины. Найти уравнение траектории точки и уравнение годографа скорости. $x = \alpha c\omega t + \beta s\omega t, \quad y = \gamma c\omega t + \rho s\omega t. \quad (1)$

1. Решение:
    1. Заметим, что $\vec{w} = \ddot{\vec{r}} = \omega^2\vec{r}$.
    2. Предположим, что уравнение траектории – кривая 1-го порядка.
        1. $2x = (\alpha+\beta)e^{\omega t} + (\alpha-\beta)e^{-\omega t}$
        2. $2y = (\gamma+\rho)e^{\omega t} + (\gamma-\rho)e^{-\omega t}$
        3. Для удовлетворения уравнению $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ требуется, чтобы был некий коэффициент $\frac{-a_2}{a_1}$, на который можно домножить 1-е уравнение перед суммой 1,2-го уравнений. Такой коэффициент существует только если $\alpha = \gamma = 0$ или $\beta = \rho = 0$.
        4. Если $\alpha = \gamma = 0$, то уравнение траектории: $\rho x - \beta y = 0$.
        5. Если $\beta = \rho = 0$. то уравнение траектории: $\gamma x - \alpha y = 0$.
    3. Предположим, что уравнение траектории – кривая 2-го порядка. Найдём выражения xy, x^2, y^2 :
        1. $4xy = (\alpha+\beta)(\gamma+\rho)e^{2\omega t} + (\alpha-\beta)(\gamma+\rho) + (\alpha+\beta)(\gamma-\rho) + (\alpha-\beta)(\gamma-\rho)e^{-2\omega t}$
        2. $4x^2 = (\alpha+\beta)^2e^{2\omega t} + (\alpha-\beta)^2e^{-2\omega t} + (\alpha^2-\beta^2)$
        3. $4y^2 = (\gamma+\rho)^2e^{2\omega t} + (\gamma-\rho)^2e^{-2\omega t} + (\gamma^2-\rho^2)$
        4. Рассмотрим сумму уравнений с коэффициентами $1, a_1, a_2$. Для того, чтобы правая часть такой суммы не зависела от t, надо решить систему уравнений:

$$\begin{matrix} e^{2\omega t}: \\ e^{-2\omega t}: \end{matrix} \begin{cases} \alpha+\beta+a_1(\alpha+\beta)^2 + a_2(\gamma+\rho)^2 = 0 \\ \alpha-\beta+a_1(\alpha-\beta)^2 + a_2(\gamma-\rho)^2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} a_1 = \left[(\alpha-\beta)(\gamma+\rho)^2 - (\alpha+\beta)(\gamma-\rho)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2(\gamma-\rho)^2 - (\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho)^2\right] \\ a_2 = \left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2\right]\left[(\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho)^2 - (\alpha+\beta)^2(\gamma-\rho)^2 \right. \end{cases}$$

2. Ответ: Уравнение траектории:

$$4xy + 4x^2\frac{(\alpha-\beta)(\gamma+\rho)^2 - (\alpha+\beta)(\gamma-\rho)^2}{(\alpha+\beta)^2(\gamma-\rho)^2 - (\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho)^2} + 4y^2\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2(\gamma+\rho)^2 - (\alpha+\beta)^2(\gamma-\rho)^2} + a_3 = 0,$$

где a_3 – остаточные коэффициенты

Задача 1.4 не доделана

Сохраняя условие предыдущей задачи, найти радиальную w_r и трансверсальную w_φ компоненты ускорения точки.

1. Решение:

$$\dot{\varphi} = \frac{2av}{\left(1+\tan^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{2av}{\left(1+(2ax)^2\right)^{3/2}}$$

2. Ответ: $w_r = \omega^2 r, \;\; w_\varphi = 0$.

Задача 1.5

Колечко движется по параболе $y = ax^2$ с постоянной скоростью v. Найти ускорение колечка в зависимости от его положения.

1. Решение:
   1. Вектор скорости зависит от наклона кривой $\begin{cases} \dot{x} = v\cos\varphi \\ \dot{y} = v\sin\varphi \end{cases}$, ускорение равно $\begin{cases} \ddot{x} = -v\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \ddot{y} = v\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases}$
   2. Полное ускорение есть $w = \sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2} = v\dot{\varphi}$. Для вектора ускорений нужно выражение $\dot{\varphi}$.
   3. Из уравнения траектории следует $\frac{dy}{dx} = 2ax = \tan\varphi$. Продифференцируем последнее равенство:

$$2a\dot{x} = 2av\cos\varphi = \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi} \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = 2av\cos^3\varphi$$

   4. Используя соотношение $\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$, преобразуем уравнение:

$$\dot{\varphi} = \frac{2av}{\left(1+\tan^2\varphi\right)^{3/2}} = \frac{2av}{\left(1+(2ax)^2\right)^{3/2}}$$

2. Ответ: $w = \frac{2a}{\sqrt{(1+4a^2x^2)^3}}v^2$.

Задача 1.6 не доделана

Если при переходе с прямолинейного участка $y = 0$ железнодорожного пути на криволинейный $y = f(x)$ нормальное ускорение меняется скачком, то происходит явление так называемого мягкого удара. Как должен начинаться криволинейный участок пути, чтобы такого удара не произошло?

1. Решение:
   1. Из соотношений $\vec{n} = \frac{\vec{\tau}'}{|\vec{\tau}'|} = \rho\vec{\tau}'$ и $\vec{w} = w_\tau\vec{\tau} + w_n\vec{n}$ следует, что на прямолинейном участке была только тангенциальная компонента ускорения $w_n = v^2k = 0$. Функция $f(x)$ должна быть такая, чтобы в точке перехода a было справедливо $k = 0$.
   2. По определению кривизна это $k = |\vec{\tau}'| = |\frac{d\vec{\tau}}{ds}| = |\frac{d}{ds}\frac{d\vec{r}}{ds}|$
   3. Можно показать, что до перехода $\vec{\tau} = [1, 0] = 1\vec{e}_x + 0\vec{e}_y$.
   4. Рассмотрим производные функции $f(x)$. Первая $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ связана с натуральным параметром s через соотношение $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ...
2. Ответ: В точке сопряжения $x = a$ должны выполняться условия $f(a) = f'(a) = f''(a) = 0$.

Задача 1.7

Точка движется по плоскости так, что угол между вектором скорости и радиус-вектором во всё время движения равен α. Найти уравнение траектории точки, если в начальный момент $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

1. Решение:
   1. Представим движение точки в полярных координатах: $\vec{q} = [r, \varphi]$. Квадрат скорости есть $v^2 = \sum H_i^2\dot{q}_i^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$.
   2. Распишем компоненты скорости по базисным векторам:

$$v_r = \frac{\partial}{\partial\dot{r}}\frac{v^2}{2} = \dot{r}, \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}} = r\dot{\varphi}$$

   Угол α между вектором скорости и радиус вектором удовлетворяет соотношениям:

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{v}, \vec{e}_r)}{|\vec{v}|} = \frac{\dot{r}}{|\vec{v}|}, \quad \sin\alpha = \frac{(\vec{v}, \vec{e}_\varphi)}{|\vec{v}|} = \frac{r\dot{\varphi}}{|\vec{v}|} \quad \rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{r\dot{\varphi}}{\dot{r}}$$

Поскольку угол α постоянен, можно разделить переменные для интегрирования:

$$\tan\alpha\frac{\dot r}{r} = \dot\varphi \quad \rightarrow \quad \varphi = \tan\alpha\ln r + C$$

3. Подставив НУ, получим $C = \varphi_0 - \tan\alpha\ln\rho_0$.

2. Ответ: $r = r_0\,\mathrm{e}[(\varphi-\varphi_0)\cot\alpha]$

Задача 1.8 **не доделана**

При движении точки её скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{w}$ связаны соотношением $\vec{w} = \vec{a}\times\vec{v}$, где $\vec{a}$ — постоянный вектор. Найти уравнение траектории точки.

1. Решение:
2. Ответ: Винтовая линия на круговом цилиндре, ось которого параллельна вектору $\vec{a}$.

Задача 1.9 **не доделана**

Сохраняя условия предыдущей задачи, показать, что при таком движении $|\vec{v}|$ и $|\vec{w}|$ остаются неизменными.

1. Решение:
2. Ответ: -

Задача 1.10 **не доделана**

Точка описывает окружность радиуса R. Ускорение точки образует с её скоростью постоянный угол α $(\alpha\neq\pi/2)$. За какое время скорость точки увеличится в n раз, если в начальный момент она равнялась v_0?

1. Решение:
2. Ответ: $t = \frac{n-1}{n}\frac{R}{v_0\cot\alpha}$

Задача 1.11 **не доделана**

Точка движется в плоскости xy с постоянной по модулю скоростью $|\vec{v}| = u$. Вектор скорости образует с осью Ox угол $\alpha = at$ (a — постоянная величина). Определить уравнение траектории точки и модуль её ускорения, если в начальный момент $t=0$ точка находилась в начале координат.

1. Решение:
2. Ответ: $x^2 + \left(y - \frac{u}{a}\right)^2 = \frac{u^2}{a^2}, \quad w = au.$

Задача 1.12 **не доделана**

Точка движется по дуге эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Вектор ускорения точки во всё время движения направлен параллельно оси Oy. Найти ускорение точки в тот момент, когда её ордината равна $b/2$, если в начальный момент $x(0)=0$, $y(0)=b$, $v(0)=v_0$.

1. Решение:
2. Ответ:$w_y = -bu_0^2/a^2$.

Задача 1.13 **не доделана**

Точка движется в плоскости xy. Модуль скорости точки и угол θ, составляемый скорость с осью Ox, является известными функциями времени t. Используя плоскость годографа вектора скорости, найти нормальную и тангенциальную компоненты ускорения точки.

1. Решение:
2. Ответ:$w_n = v\dot\theta, \quad w_\tau = \dot v, \quad \tau = \vec{v}/v.$

Задача 1.18

Движение точки в плоскости задано в полярных координатах $r=r(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$. Показать, что в случае постоянства секториальной скорости ($r^2\dot\varphi = const$) вектор ускорения точки коллинеарен её радиус-вектору.

1. Решение:
    1. Представим положение в полярных координатах: $x = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$

2. Формально дифференцируя, получаем сначала скорость, а затем и ускорение: $v = \begin{bmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} \ddot r\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\sin\varphi - r\ddot\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi \\ \ddot r\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi \end{bmatrix}$
3. Посчитаем векторное произведение ускорения на радиус-вектор:

$$[\times \boldsymbol{w}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1w_2 - x_2w_1 \end{bmatrix}$$

$$[\times \boldsymbol{w}] = r[\ddot r\cos\varphi\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos^2\varphi + r\ddot\varphi\cos^2\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi - \ddot r\cos\varphi\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\sin^2\varphi + r\ddot\varphi\sin^2\varphi + r\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi] = r[2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi] =$$

$$r^2\dot\varphi = const \;\rightarrow\; 2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi = 0 \;\rightarrow\; [\times \boldsymbol{w}] = \vec{0}$$

2. <u>Ответ</u>: $[\times \boldsymbol{w}] = \vec{0}$

<u>Задача 1.19</u>

Планета движется по эллиптической орбите, уравнение которой в полярных координатах имеет вид: $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$. Найти зависимость радиальной w_r и трансверсальной w_φ компонент ускорения планеты от r, используя закон площадей $r^2\dot\varphi = c = const$
.

5. <u>Решение</u>:

1. Представим положение в полярных координатах: $x = \begin{bmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{bmatrix}$
2. Формально дифференцируя, получаем сначала скорость, а затем и ускорение: $v = \begin{bmatrix} \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} \ddot r\cos\varphi - 2\dot r\dot\varphi\sin\varphi - r\ddot\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi \\ \ddot r\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi - r\dot\varphi^2\sin\varphi \end{bmatrix}$
3. Направления радиальное: $\frac{\partial x}{\partial r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}$, трансверсальное: $\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$
4. Компоненты ускорения - скалярное произведение вектора ускорения и направления:

$$\omega_\varphi = (, \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}) = -\ddot r\cos\varphi\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\sin^2\varphi + r\ddot\varphi\sin^2\varphi + r\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi + \ddot r\cos\varphi\sin\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos^2\varphi + r\ddot\varphi\cos^2\varphi - r\dot\varphi^2\cos\varphi\sin\varphi = 2\dot r$$

$$r^2\dot\varphi = const \;\rightarrow\; 2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi = 0 \;\rightarrow\; \omega_\varphi = 0$$

$$w_r = (\boldsymbol{w}, \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}) = \ddot r\cos^2\varphi - 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi - r\ddot\varphi\cos\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\cos^2\varphi + \ddot r\sin^2\varphi + 2\dot r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi + r\ddot\varphi\cos\varphi\sin\varphi - r\dot\varphi^2\sin^2\varphi = \ddot r - r\dot\varphi^2$$

5. Чтобы убрать вторую производную, воспользуемся уравнениям эллиптической орбиты и законом площадей (убираем производные):

$$\dot r = \frac{pe\dot\varphi\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{pe\dot\varphi r^2\sin\varphi}{p^2} = \frac{ce\sin\varphi}{p}$$
$$\ddot r = \frac{ce}{p}\dot\varphi\cos\varphi = \frac{c^2e}{pr^2}\cos\varphi = \frac{c^2e}{pr^2}(\frac{p}{r} - 1)$$
$$w_r = \frac{-c^2}{pr^2}$$

6. <u>Ответ</u>:

$$w_r = -\frac{c^2}{pr^2}, \quad w_\varphi = 0$$

<u>Задача 1.25</u>

При движении точки её радиус-вектор $\boldsymbol{r}$, скорость $\boldsymbol{v}$ и ускорение $\boldsymbol{w}$ связаны соотношением $\boldsymbol{w} = a[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}]$, $a = const > 0$. Найти радиус кривизны траектории точки как функцию $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$.

1. <u>Решение</u>:
    1. Воспользуемся соотношением

       Заметка "Дебильник по теормеху#^399432" не существует. Нажмите, чтобы создать.
    2. Из коллинеарности вектора скорости и тангенциали $\boldsymbol{v} = \frac{ds}{dt}$ и уравнение движения $\boldsymbol{w} = a[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}]$ находим, что вектор ускорения не имеет составляющей вдоль вектора тангенциали, то есть

$$\boldsymbol{w} = \frac{v^2}{\rho},$$

       из чего следует, что достаточно найти модуль вектора ускорения $\boldsymbol{w}$.
    3. Собирая всё вместе, получаем:

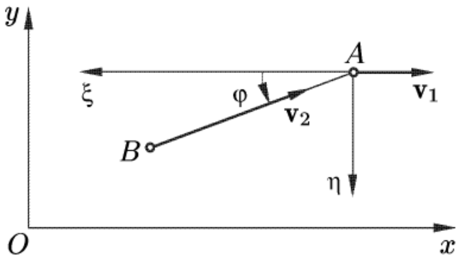
$$a|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}| = \frac{v^2}{\rho} \;\rightarrow\; \rho = \frac{v^2}{a|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}|}$$

2. Ответ:

$$\rho = \frac{v^2}{a|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}|}$$

Задача 1.29

Самолёт, изображённый на рисунке точкой A, движется горизонтально на высоте H с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$. В момент, когда самолёт пролает над ракетной установкой, пускают самонаводящуюся ракету B, имеющую скорость $\boldsymbol{v}_2$ и всё время направленную к точке A, $|\boldsymbol{v}_2| = 2|\boldsymbol{v}|$. Найти уравнение траектории ракеты $AB = r(\varphi)$ в системе отсчёта $A\xi\eta$, движущейся с самолётом. Найти также время полёта ракеты с моменты вылета до поражения самолёта и её ускорение как функцию угла φ.



1. Решение:
    1. Уравнения движение B в системе отсчёта самолёта $A\xi\eta$:

$$\dot\xi = -v_2\cos\varphi + v_1 = -v_2\tfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} + v_1$$
$$\dot\eta = -v_2\sin\varphi = -v_2\tfrac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

    2. Расстояние $\vec{AB}$ обозначим r. Очевидно, $\xi = r\cos\varphi,\quad \eta = r\sin\varphi$. Продифференцируем:

$$\begin{array}{c} \dot\xi = \dot r\cos\varphi - \dot\varphi r\sin\varphi, \\ \dot\eta = \dot r\sin\varphi + \dot\varphi r\cos\varphi, \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{c} \dot\xi\cos\varphi + \dot\eta\sin\varphi = \dot r, \\ -\dot\xi\sin\varphi + \dot\eta\cos\varphi = \dot\varphi r. \end{array}$$

    3. Подставим $\dot\xi,\ \dot\eta$ из уравнений движения:

$$\begin{array}{cc} \dot r = (-v_2\cos\varphi + v_1)\cos\varphi + (-v_2\sin\varphi)\sin\varphi, & \dot r = v_1\cos\varphi - v_2, \\ \dot\varphi r = -(-v_2\cos\varphi + v_1)\sin\varphi + (-v_2\sin\varphi)\cos\varphi, & \dot\varphi = -\frac{v_1}{r}\sin\varphi. \end{array}$$

    4. Поделим верхнее уравнение на нижнее:

$$\frac{dr}{d\varphi} = r\frac{-v_1\cos\varphi + v_2}{v_1\sin\varphi}, \quad \frac{dr}{r} = \frac{v_2}{v_1\sin\varphi}d\varphi - ctg(\varphi)d\varphi.$$

    5. Интегрируем:

$$\ln r = \frac{v_2}{2v_1}\ln tg^2(\varphi/2) - \ln\sin\varphi + \text{const}, \qquad r = \frac{\text{const}}{\sin\varphi}\left(\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{v_2/2v_1} =^{(v_2=2v_1)}= \text{const}\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$$

    6. Из начальных условий $r_0 = H$ получаем

$$r = H\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}.$$

    7. Подставим полученное решение в изменение угла:

$$\dot\varphi = -\frac{v}{H}\frac{(1+\cos\varphi)^2}{\sin\varphi}\sin\varphi = -\frac{v}{H}(1+\cos\varphi)^2.$$

    8. Интегрируем:

$$dt\frac{-v}{H} = \frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}, \quad \frac{-v}{H}t = \int_{\pi/2}^{0}\frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{\sin x(\cos x + 2)}{3(\cos x+1)^2}\Big|_{\pi/2}^{0}, \quad t = \frac{2}{3}vH.$$

    9. Воспользуемся соотношениями

Заметка "Дебильник по теормеху#^299844" не существует. Нажмите, чтобы создать.

Заметка "Дебильник по теормеху#^399432" не существует. Нажмите, чтобы создать.

с учётом $\dot v_2 = 0$:

$$\boldsymbol{w} = \frac{v^2}{\rho} = v^2\frac{d\tau}{ds}$$

$$\tau = \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \begin{bmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{bmatrix} \frac{d\varphi}{ds}, \quad \left|\frac{d\tau}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \left|\frac{ds}{dt}\right|^{-1} = \frac{|\dot\varphi|}{v_2}$$

10. Подставим полученную зависимость $\dot\varphi(\varphi)$:

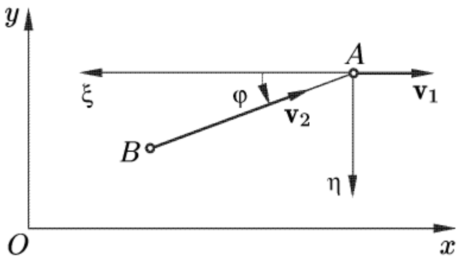
$$w = v_2^2 \frac{|\dot\varphi|}{v_2} = 2v\frac{v}{H}(1+\cos\varphi)^2 = \frac{2v^2}{H}(1+\cos\varphi)^2.$$

2. Ответ:

$$r = H\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}, \quad t = \frac{2}{3}\frac{H}{v}, \quad w = \frac{2v^2}{H}(1+\cos\varphi)^2.$$

Задача 1.31

В задаче преследования убегающей A движется по прямой с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_1$. Догоняющий B движется с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}_2$, направленной по AB. Найти уравнение траектории сближения $AB = r(\varphi)$ в СО, связанной с убегающим, если $\varphi_0 \neq 0$.



1. Решение:
   1. Из задачи 1.29 получено: $\ln r = \text{const}\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$
   2. Предположим, что начальные условия $r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0$, тогда можно избавиться от $const$, поделив r на r_0, поскольку $const$ одинакова.
2. Ответ:

$$\frac{r}{r_0} = \frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi}\left[\frac{tg(\varphi/2)}{tg(\varphi_0/2)}\right]^{v_2/v_1}$$

Задача 1.37 (б)

> Используя $w_{q_j} = \frac{1}{h_j}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q_j}(\frac{v^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial q_j}(\frac{v^2}{2})\right]$, найти скорость точки и проекции её ускорения на касательные к координатным линиям для сферических координат $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1(r,\theta,\varphi) \\ \varphi_2(r,\theta,\varphi) \\ \varphi_3(r,\theta,\varphi) \end{bmatrix}$.

1. Решение:
   1. Чтобы воспользоваться соотношением $\boldsymbol{v} = H_1\dot q_1\boldsymbol{e}_1 + H_2\dot q_2\boldsymbol{e}_2 + H_3\dot q_3\boldsymbol{e}_3$, нужно рассчитать коэффициенты Ляме:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial r} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ -r\sin\theta \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta$$

   2. Следовательно, в сферических координатах вектор скорости выражается вот так: $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot r \\ r\dot\theta \\ r\dot\varphi\sin\theta \end{bmatrix}$, и квадрат скорости: $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\dot\varphi^2\sin^2\theta$.
   3. Применяем формулу:

$$w_r = \frac{d}{dt}\frac{2\sin r}{2} - \frac{2r\dot\theta^2 + 2r\dot\varphi^2\sin^2\theta}{2} = \ddot r - r(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)$$
$$w_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\frac{2r^2\dot\theta}{2} - \frac{2r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta}{2}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right]$$
$$w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}\frac{2r^2\dot\varphi\sin^2\theta}{2}\right]$$

2. Ответ:

$$v = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 r^2\sin^2\theta}, \quad w_r = \ddot r - r(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta),$$
$$w_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r^2\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta\right], \quad w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi\sin^2\theta)$$

Задача 1.41

> Точка движется по поверхности сферы вдоль координатной линии φ $(r = \mathrm{const}, \theta = \mathrm{const})$ сферической системы координат с постоянной скоростью v. Найти вектор кривизны траектории и указать условия, при которых траектория точки является геодезической.

1. Решение:
   1. Вектор кривизны траектории есть $\vec{\tau}' = k\vec{n}$.
   2. Найдём вектор $\vec{\tau}$ с учётом $r, \theta = \mathrm{const}$:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}, \quad dr = \begin{bmatrix} -r\sin\theta\sin\varphi d\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi d\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Пользуясь соотношением $ds_i = H_i dq_i$ получим $ds = r\sin\theta d\varphi$. Тогда

$$\vec{\tau} = \frac{d}{ds}\vec{\rho} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\tau}' = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\frac{d\varphi}{ds} = \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{r\sin\theta}$$

2. Ответ: $[-\cos\varphi \quad -\sin\varphi \quad 0]^T \frac{1}{r\sin\theta}$. (в другой форме, чем в Пятницком)

Задача 1.47

> Найти кривизну траектории точки, движущейся с ускорением $\vec{w} = \frac{\gamma}{r^3}[\dot{\vec{r}} \times \vec{r}]$, где $\vec{r}$ — её радиус-вектор, $\gamma = \mathrm{const}$, если в начальный момент скорость точки равнялась $\vec{v}_0$.
> 3. Решение:

```
1. Используем соотношение $\v w=\d v \v \tau + v^2k\v n.$ Поскольку $\v w$ сонаправлен $[\v v\ti\v r]$ и ортогонален $\v \tau,$ ускорение имеет только нормальную компоненту $\v w=v^2k\v n.$
2. Следовательно, $\d v=0\h\to\h v=\mr{const}=v_0.$ Итого, $$k=\frac{|\v w|}{v_0^2}=\frac{\g}{v_0^2 r^3}\left| \lbs \v v\ti \v r \rbs \right|.$$
```

4. Ответ: $\frac{\gamma}{v_0^2 r^3}\left|[\vec{v} \times \vec{r}]\right|$.