1. Рассматривается система

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in C'(\mathbb{R}^n)$$

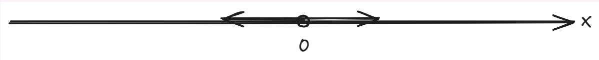
    1. Замечание: Все решения задач Коши !∃
2. ε-возмущение системы – система $\dot{x} = f(x) + h(x)$, где $h(x)$ – гладкая в $\mathbb{R}^n$, причём

$$\max_x ||h(x)|| \leq \varepsilon, \quad \max_x ||h'_x(x)|| \leq \varepsilon, \quad ||h(x)|| = \sqrt{h_1^2(x) + \ldots + h_n^2(x)}, \quad ||h'_x(x)|| = \sqrt{\lambda_{\max}(h'^T h')}$$

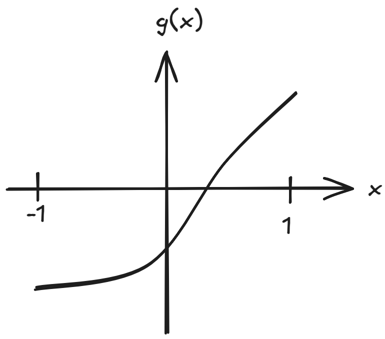
3. Гомеоморфизм – отображение $F : \mathbb{R} \to \Delta$, где
    1. F непрерывно
    2. $\exists F^{-1} : \Delta \to \Omega$
    3. F^{-1} непрерывно
4. Динамические системы $\dot{x} = f(x), \quad \dot{y} = g(y)$ топологически эквиваленты, если $\exists$ гомеоморфизм T такой, что если $x = x(t)$ – траектория $\dot{x} = f(x)$, то $y(t) = T(x(t))$ - траектория $\dot{y} = g(y)$
5. Грубая система (структурная устойчивость) на компакте D :

$$\exists \varepsilon_0 : \forall \varepsilon < \varepsilon_0 \to \forall \varepsilon(\dot{x} = f(x)) \ \textit{топологически эквивалентны на} \ D$$

    1. Андронов, Понтрягин: грубость – структурная устойчивость ДС
6. Теорема Юрмагулова:
    1. ↳ Для одномерных систем топологическая эквивалентность тождественна фазовой эквивалентности
    2. Применение: эквивалентность ФП - столько же положений равновесий, у них та же устойчивость/неустойчивость
7. Пример: $\dot{x} = x, \quad x \in [-1, 1]$



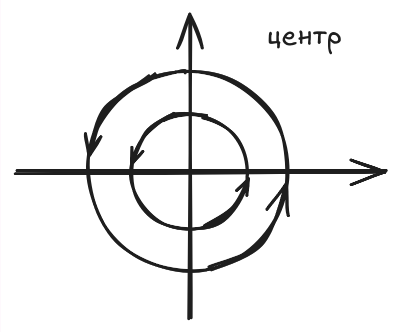
    1. Гомеоморфизм? Мы не поняли, но нашли, что εx^2 - приемлимое ε-возмущение на $[-1, 1]$
    2. Применение теоремы Юрмагулова:
        1. $\varepsilon_0 = 1$ - сами выбрали (почему?)
        2. $\dot{x} = x + h(x), \quad |h(x)| < 1, |h'(x)| < 1, \quad \forall x \in [-1, 1]$
        3. $g(x) = x + h(x) = 0$
            1. g непрерывна, монотонна
            2. $g(-1) < 0, \quad g(1) > 0$
            3. $g'(x) = 1 + h'(x) > 0$



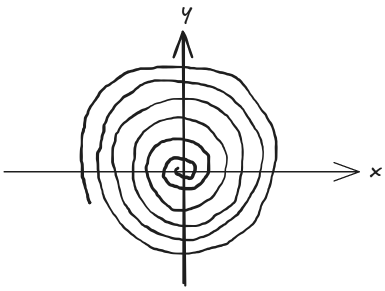
        4. значит, $\exists! \tilde{x} : g(\tilde{x}) = 0$ на $[-1, 1]$
8. Теорема:
    1. ↳ Одномерная система

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a)f(b) \neq 0$$

является грубой на $D = [a, b] \iff$ все имеющиеся на $[a, b]$ положеня равновесия гиперболические
9. Пример: $\dot{x} = x^2, \quad x \in [1, 2]$
    1. Грубая, так как положений равновесия вообще нет, а значит все гиперболические
10. Пример: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad D = [1, 1]^2$



1. ε-возмущение: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \varepsilon y \end{cases} \to \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{bmatrix}$
2. $\lambda(\varepsilon + \lambda) + 1 = 0, \quad \lambda^2 \lambda\varepsilon + 1 = 0, \quad (\lambda + \frac{\varepsilon}{2})^2 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$
3. $\lambda = -\frac{\varepsilon}{2} \pm i\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$
4. Теперь ФП - устойчивый фокус



11. Теорема Андронова-Понтрягина:
    1. ↳ Двумерная система

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2$$

грубая, где D - компакт, ∂D - гладкая замкнутая кривая на касательной к $f(x)$ ни в одной точке (проверить в ~~лекциях~~ интернете!) $\iff$

1. › все ПР в D гиперболические
2. › все предельные циклы в D гиперболические
3. › в D нет сепаратрис, идузищ из седла в седло (в частности, в самого себя)