

Задача двух тел и ее решение. Классификация траекторий. Законы Кеплера для эллиптических траекторий. Основная задача внешней баллистики.

Центральное гравитационное поле

$$\vec{F} = -\frac{\gamma M m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \Pi = -\frac{\gamma M m}{r}$$

Закон энергии $T + \Pi = h = const$. Из формулы Бине: $h = \frac{m}{2} c^2 \left(\left[\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right]^2 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{\gamma M m}{r}$.

$$h = \frac{mc^2}{2} (u')^2 + \Pi^*, \quad \Pi^* = \frac{mc^2}{2r^2} - \frac{\gamma M m}{r}$$

$u' = \pm \sqrt{\frac{2}{mc^2} h - u^2 + \frac{2\gamma M m}{mc^2} u}$ - уравнение с разделяющимися переменными. После разделения:

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2h}{mc^2} - \left(\frac{\gamma M}{c^2}\right)^2 - \left(u - \frac{\gamma M}{c^2}\right)^2}} - \text{Табличный интеграл}$$

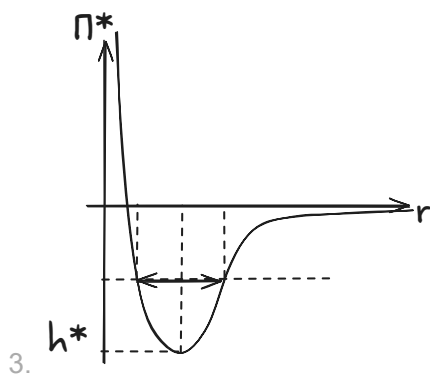
$$\pm(\varphi - \varphi_0) = -\arccos \frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma M}{c^2}}{\frac{\gamma M}{c^2} \sqrt{\frac{2hc^2}{m\gamma^2 M^2} + 1}}$$

Обозначим: $p = \frac{c^2}{\gamma M}$, $e^2 = \frac{2hc^2}{m\gamma^2 M^2} + 1$. Тогда уравнение траектории: $e \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{r} - 1$, или то же самое:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$$

Если $e = 0$, то $h = h^* = -\frac{m\gamma^2 M^2}{2c^2}$ - окружность. Если $0 < e < 1$, то $h \in (h^*, 0)$ - эллипс. Если $e = 1$, то $h = 0$ - парабола. Если $e > 1$, то $h > 0$ - гипербола. Область возможности движения

- $0 \leq (u')^2 = \frac{2}{mc^2} \sqrt{h - \Pi^*(r)} \rightarrow h \geq \Pi^*(r)$
- Область возможности движения ОВД: $\{z : h \geq \Pi^*(r)\}$



3.

1. Первая космическая скорость v_1

$$4. e = 0 \rightarrow h = -\frac{\gamma^2 M^2 m}{2c^2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{\gamma M m}{R}$$

$$5. c = r^2 \dot{\varphi} = |[\vec{r} \times \vec{v}]| = R v_1$$

$$6. \text{Подставим: } v_1^2 = \frac{\gamma M}{R}$$

2. Вторая космическая скорость v_2

$$1. e = 1, \quad h = 0$$

$$2. v_2^2 = \frac{2\gamma M}{R}$$

4. Законы Кеплера:

6. Траектории - эллипсы

7. Закон сохранения площадей $c = r^2 \dot{\varphi} = const$ (для любой центральной силы)

8. $T^2/a^3 = const$ для всех планет

1. Большая полуось - среднее апогея и перигея: $2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}$, $p = a(1 - e^2)$

2. По теореме Пифагора, $b^2 = a^2(1 - e^2) = ap$

$$3. \dot{S} = \frac{c}{2}, \quad \frac{\pi ab}{T} = \frac{c}{2}$$

$$4. \text{Тогда } T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 b^3}{c^2} = \frac{4\pi^2 p}{c^2} a^3 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3$$

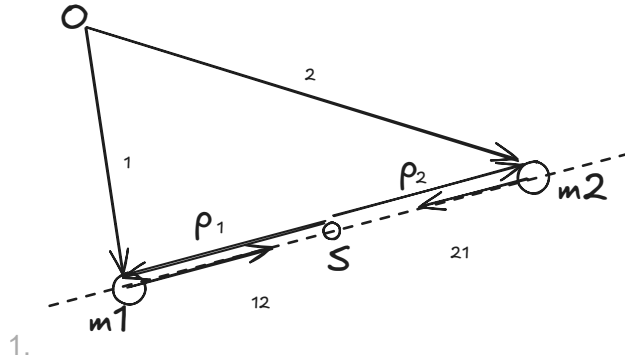
9. = Кеплер решал задачу обратно: по 3-м законам получил силу гравитации

1. Из 2-го закона можно получить формулу Бине (мы так и сделали)

2. По формулам Бине и уравнению траектории можно получить силу

3. Грав. постоянная определяется из 3-го закона

5. ☉ Пример: задача 2-х тел



1.

$$2. \vec{F}_{12} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

3. Теорема об изменении импульса $\rightarrow m\ddot{\vec{W}}_S = 0 \rightarrow \ddot{\vec{r}}_S = 0$ (внешних сил нет)

4. Тогда СО Кенига в центре масс $\vec{r}_s = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ - инерциальная (обозначим $m = m_1 + m_2$)

$$5. \vec{\rho}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_s = \frac{m_2}{m}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad \vec{\rho}_2 = \frac{m_1}{m}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

6. Закон движения точки 1: $m_1 \ddot{\vec{\rho}}_1 = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - 0 =$ (учитывая предыдущий пункт)

$$= -\frac{\gamma m_1 m_2}{(m \rho_1 / m_2)^2} \frac{\vec{r}_1}{\rho_1} = -\frac{\gamma_1 m m_1}{\rho_1^2} \frac{\vec{\rho}_1}{\rho_1}, \text{ где } \gamma_1 = \frac{\gamma m_2^3}{m^3}$$

7. Получилось то же самое, что и в центральном поле, но с другим коэффициентом γ_1

8. Уточнение законов Кеплера для этого случая:

1. В фокусе эллипса - центр масс всей системы

2. Закон сохранения площадей - от центра масс системы

3. 3-й закон, вообще говоря, не выполняется (γ разная для тел)

6. ➔ Динамика твёрдого тела

$$7. \vec{F} = \sum F_i^{(e)}, \quad \vec{M}_0 = \sum [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}], \quad \dot{T} = \sum (\vec{F}_i^{(e)}, \vec{v}_i), \text{ т.к. } \sum (\vec{F}_i^{(i)}, \vec{v}_i) = 0 \text{ для твёрдого тела}$$

8. ➔ Теорема (об изменении кинетической энергии): $\dot{T} = \sum (\vec{F}_i^{(e)}, \vec{v}_i) = (\vec{F}, \vec{v}_p) + (\vec{M}_p, \vec{\omega})$, где P - любой полюс

9. > Две системы сил, действующих на твёрдое тело в совокупности с точками их приложения, называются эквивалентными, если они оказывают на тело одно и то же движение тела

$$1. \text{Следствие 1: } \{\vec{F}_i, \vec{P}_i\} \sim \{\vec{F}'_i, \vec{P}'_i\} \iff \sum \vec{F}_i = \sum \vec{F}'_i \text{ и } \sum [\vec{OP}_i \times \vec{F}_i] = \sum [\vec{OP}'_i \times \vec{F}'_i]$$

$$1. \text{Другими словами, } \{\vec{F}_i, \vec{P}_i\} \sim \{\vec{F}'_i, \vec{P}'_i\} \iff \vec{F} = \vec{F}', \quad \vec{M}_o = \vec{M}'_o$$

2. Замечание: точка O произвольная или существует хотя бы одна? Если

$$\vec{F} = \vec{F}', \quad \vec{M}_o = \vec{M}'_o \text{ справедливо для какой-то одной, то справедливо и для всех остальных}$$

2. Следствие 2: систему сил или моментов можно заменить главными $\vec{F}, \vec{M}_o$

10. > Равнодействующая системы сил - 1 сила $\vec{R}$, эквивалентная всей системе сил (если она существует): $\{\vec{F}_i, \vec{P}_i\} \sim \{\vec{R}, O\}$

1. Следствие: у системы сил существует равнодействующая, если существует точка тела O , относительно которой $\vec{M}_o = 0$

11. ☉ Пример: равнодействующая силы тяжести

1. Предложение: $\{m_i \vec{g}, \vec{P}_i\} \sim \{m \vec{g}, S\}$ - можно заменить сумму сил на элементарные части тела одной силой

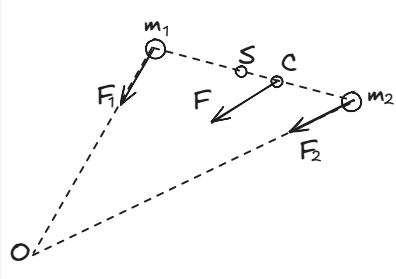
1. $\square \sum m_i \vec{g} = \vec{g} \sum m_i = m \vec{g}$

2. Докажем отсутствие момента: $\sum [\vec{r}_i \times m_i \vec{g}] = [\sum m_i \vec{r}_i \times \vec{g}] = [0 \times \vec{g}] = 0 \blacksquare$

3. Это справедливо для однородной силы тяжести (у поверхности Земли)

12. ☉ Пример: сила тяжести не у поверхности Земли

2.



3. S - центр масс $\vec{r}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$,

4. C - центр тяжести - точка, куда надо приложить равнодействующую $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2; \vec{P}_1, \vec{P}_2\} \sim \{\vec{F}, C\}$

1. $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

2. $[\vec{CP}_1 \times \vec{F}_1] + [\vec{CP}_2 \times \vec{F}_2] = 0$ - такая точка C существует, потому что вектора лежат в одной плоскости, но она не совпадает с S

13. ↪ Теорема: если $\vec{F} \neq 0$, то $\exists$ точка $A : \vec{M}_A \parallel \vec{F}$

1. λ - параметр динамического винта: $\lambda \vec{F} = \vec{M}_0 + \left[\vec{F} \times \frac{[\vec{F} \times \vec{M}_0]}{F^2} + \beta \vec{F} \right] = \frac{(\vec{F}, \vec{M}_0)}{F^2} \vec{F}$

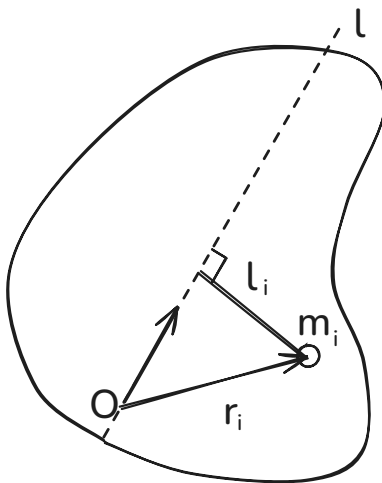
14. ☑ Классификация системы сил

2. $\vec{F} = 0 \rightarrow \{\vec{F}_i, \vec{P}_i\} \sim \{\vec{M}_0, O\}$

3. $\vec{F} \neq 0, \lambda = 0 \rightarrow \{\vec{F}_i, \vec{P}_i\} \sim \{\vec{F}, A\} = \{\vec{R}, A\}$ (A - точка на оси динамического винта)

4. $\vec{F} \neq 0, \lambda \neq 0 \rightarrow \{\vec{F}_i, \vec{P}_i\} \sim \{\vec{F}, \vec{M}_0; O\}$, а равнодействующей не существует $\nexists \vec{R}$

15. ↪ Геометрия масс



16.

17. > Момент инерции относительно оси $l : J_l = \sum m_i \rho_i^2 = \sum m_i ([\vec{r}_i \times \vec{l}])^2 = \sum m_i (\vec{r}_i^2 - (\vec{r}_i, \vec{l})^2)$

1. Замечание: пусть $\exists O \in l : \vec{v}_O = 0$, тогда $\vec{v} = \vec{v}_O + [\vec{\omega} \times \vec{OP}_i] = [\vec{\omega} \times \vec{r}_i]$

2. $T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2} ([\vec{\omega} \times \vec{r}_i])^2 = \sum \frac{m_i}{2} \omega^2 \rho_i^2 = \frac{1}{2} J_l \omega^2$

3. Если непрерывное распределение масс, то $J = \iint_m \rho^2 dm$

18. ↳ Теорема Гюйгенс-Штейнера:

$$J_l = J_{l'} + md^2, \quad \text{если} \quad \begin{array}{l} 1. \quad l \parallel l' \\ 2. \quad S \in l' \\ 3. \quad d = \text{dist}(l, l') \end{array}$$

19. > Основные моменты инерции:

$$J_x = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2), \quad J_y = \sum m_i(x_i^2 + z_i^2), \quad J_z = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

20. ↳ Утверждение (неравенство треугольника): $J_x + J_y \geq J_z$

21. > Центробежные моменты инерции:

$$J_{xy} = \sum m_i x_i y_i, \quad J_{xz} = \sum m_i x_i z_i, \quad J_{yz} = \sum m_i y_i z_i$$

22. > Тензор инерции в точке O :

$$J_o = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{bmatrix}$$

1. Пусть $\vec{l} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$ - некоторый направляющий вектор: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

2. Посчитаем момент инерции относительно оси:

$$J_l = \sum m_i [(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2] = \dots = (J_x \alpha - J_{xy} \beta - J_{xz} \gamma) \alpha + (-J_{xy} \alpha +$$

3. ☑ Итого, $J_l = (J_o \vec{l}, \vec{l})$

23. ▮ Формула замена базиса: $J_o = X^T J'_o X, \quad J'_o = X J_o X^T$

$$1. \quad \vec{l}' = X \vec{l}$$

$$2. \quad J_l = (J'_o \vec{l}', \vec{l}') = (J'_o X \vec{l}, X \vec{l}) = (X^T J'_o X \vec{l}, \vec{l}) = (J_o \vec{l}, \vec{l})$$

24. > Эллипсоид инерции твёрдого тела в точке O - множество точек

$$\Sigma = \{\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z : J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{xz}xz = 1\}$$

1. Замечание: почему эллипсоид? Перепишем равенство в форме

$$1 = (J_o \vec{r}, \vec{r}) = r^2 (J_o \vec{e}_r, \vec{e}_r) = r^2 J_{\vec{e}_r}. \quad \text{Тогда } r = \pm \sqrt{1/J_{\vec{e}_r}}. \quad \text{Так по каждому направлению } \vec{r}.$$

Получается ограниченная поверхность второго порядка. Это только эллипсоид.

2. У эллипса есть оси симметрии: $\exists O\xi\eta\zeta : \xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 + \zeta^2/c^2 = 1$

25. > Главные оси симметрии $O\xi, O\eta, O\zeta$ в точке O , а $A = \frac{1}{a^2}, B = \frac{1}{b^2}, C = \frac{1}{c^2}$ - главные моменты инерции. В $O\xi\eta\zeta$ тензор диагонален: $J_o = \text{diag}(A, B, C)$

26. > Главные центральные оси тела (в центра масс): S_ξ, S_η, S_ζ

27. ☑ Замечание: как приводить матрицу к каноническому виду

1. Главные моменты инерции - характеристические корни уравнения $\Delta(J_o - \lambda E) = 0$

2. Из собственных векторов $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ составляется матрица поворота

1. $A \neq B \neq C \rightarrow \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ определяются однозначно

2. $A = B \neq C \rightarrow \vec{e}_\zeta$ определяется однозначно, а $\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta$ - с точностью до поворота. Тогда $\vec{e}_\zeta$ - ось динамической симметрии

3. $A = B = C \rightarrow \vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ - произвольные

28. ↳ Утверждение: ось симметрии однородного твёрдого тела является его главной осью в любой своей точке

1. Однородность относительно оси: если есть m_i с перпендикуляром от оси $\vec{\rho}_i$, то в $-\vec{\rho}_i$ тоже есть m_i

29. ↳ Утверждение: ось, перпендикулярная плоскости симметрии однородного твёрдого тела, является главной в точке пересечения с плоскостью

30. ► Формула переноса из СК главных осей инерции $J = \text{diag}(A, B, C)$ в другое СК $A(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$:

$$\mathbb{J}_A = \begin{bmatrix} A + m(\eta_0^2 + \zeta_0^2) & -m\xi_0\eta_0 & -m\xi_0\zeta_0 \\ -m\xi_0\eta_0 & B + m(\xi_0^2 + \zeta_0^2) & -m\eta_0\zeta_0 \\ -m\xi_0\zeta_0 & -m\eta_0\zeta_0 & C + m(\xi_0^2 + \eta_0^2) \end{bmatrix}$$

Вычисление кинетической энергии и кинетического момента

Случай 1: твёрдое тело с неподвижной точкой. $\mathbb{J}_O$ — тензор инерции относительно неподвижной точки O .

ТЕОРЕМА:

При движении тела с неподвижной точкой справедливо равенство

$$T = \frac{1}{2}(\mathbb{J}_O \vec{\omega}, \vec{\omega}), \quad \vec{K}_O = \mathbb{J}_O \vec{\omega}$$

СЛЕДСТВИЕ 1:

$$\vec{K}_O = \frac{\partial T}{\partial \vec{\omega}} = \text{grad}_{\vec{\omega}} T$$

СЛЕДСТВИЕ 2:

Пусть $O\xi, O\eta, O\zeta$ — главные оси инерции в точке O ;

$$\mathbb{J}_O = \text{diag}(A, B, C), \quad \vec{\omega} = p\vec{e}_\xi + q\vec{e}_\eta + r\vec{e}_\zeta.$$

Тогда

$$\vec{K}_O = Ap\vec{e}_\xi + Bq\vec{e}_\eta + Cr\vec{e}_\zeta, \quad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

СЛЕДСТВИЕ 3:

Вращение вокруг неподвижной оси $\vec{\omega} = w\vec{e}_z$. Тогда

$$T = \frac{1}{2}\mathbb{J}_O \omega^2, \quad \vec{K}_O = -J_{xz}\vec{e}_x - J_{yz}\vec{e}_y + J_z\vec{e}_z.$$

То есть $K_z = (\vec{K}_O, \vec{e}_z) = J_z \omega$.

Случай 2: произвольное движение твёрдого тела.

Из формулы Кёнига:

$$T = \frac{mv_S^2}{2} + \frac{1}{2}(\mathbb{J}_O \vec{\omega}, \vec{\omega}), \quad \vec{K}_O = [\vec{r}_S \times m\vec{v}_S] + \mathbb{J}_S \vec{\omega}$$

СЛЕДСТВИЕ 1:

Плоско-параллельное движение

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z, \quad T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_{Sz} \omega^2, \quad \vec{K}_O = \frac{1}{2} [\vec{r}_S \times m \vec{v}_S] - J_{xz} \omega \vec{e}_x - J_{yz} \omega \vec{e}_y + J_z \omega \vec{e}_z.$$

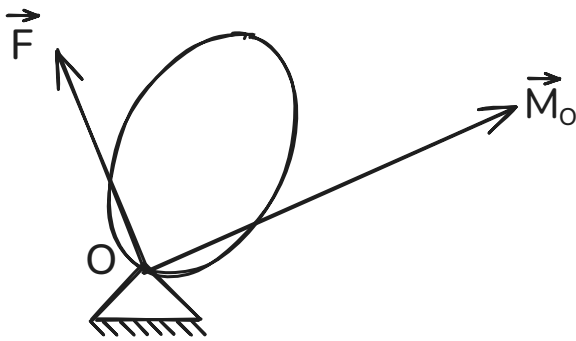
Следствие 2:

Продифференцируем кин. энергию

$$\dot{T} = (m \vec{w}_S, \vec{v}_S) + (\mathbb{J}_O \vec{e}, \vec{\omega}) = (\vec{F}, \vec{v}_S) + (\vec{M}_S, \vec{\omega}).$$

Динамика твёрдого тела с неподвижной точкой (волчок).

До этого, неважно, было ли ускорение у точки O : $\vec{v}_O = 0$. Теперь $\vec{v}_O \equiv 0$.



Все силы можно привести к точке. Будем приводить к точке O :

$$\vec{v}_O \equiv \vec{0}, \quad \vec{M}_O = \sum [\vec{r}_i \times \vec{F}_i]$$

Основное уравнение динамики (сила не создаёт момент):

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O + 0$$

Кинетический момент удобно находить в главных осях $O\xi, O\eta, O\zeta$:

$$\vec{K}_O = A p \vec{e}_\xi + B q \vec{e}_\eta + C r \vec{e}_\zeta$$

Но проекции записаны в подвижной системе координат. Связь абсолютной и относительной производных:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \dot{\vec{K}}_O + [\vec{\omega} \times \vec{K}_O] = A \dot{p} \vec{e}_\xi + B \dot{q} \vec{e}_\eta + C \dot{r} \vec{e}_\zeta + \begin{bmatrix} \vec{e}_\xi & \vec{e}_\eta & \vec{e}_\zeta \\ p & q & r \\ A p & B q & C r \end{bmatrix} = M_\xi \vec{e}_\xi + M_\eta \vec{e}_\eta + M_\zeta \vec{e}_\zeta.$$

Получаются динамические уравнения Эйлера:

$$C A \dot{p} + (C - B) q r = M_\xi B \dot{q} + (A - C) r p = M_\eta C \dot{r} + (B - A) q p = M_\zeta \epsilon$$

- Замечание: где здесь неизвестные? Допустим, на тело действуют неизвестные силы, и теперь их можно найти.

- Замечание: динамические и кинематические уравнения Эйлера задают замкнутую систему дифференциальных уравнений