<u>Геометрия масс. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения. Теорема о движении центра масс. Реактивное движение. Уравнение Мещерского. Теорема об изменении кинетической энергии. Основные теоремы динамики для относительного движения.</u>

1. Пусть есть система материальных точек $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^3, \quad i = \overline{1, N}$ (можно записать кратно $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1, \dots z_N)) \in \mathbb{R}^{3N}$
2. Принцип детерминированности: движение точек замкнутой системы полностью и однозначно определяется начальными положениями точек и их скоростями в любой начальный момент времени: $\vec{r}(t) = \vec{\Phi}(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t_0, t)$
3. Можно посчитать 2-ю производную по $t : \ddot{\vec{r}}(t) = \frac{d^2}{dt}\vec{\Phi} = \vec{f}(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t_0, t)$
   1. При $t = t_0$ получаем: $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}}_0, t_0)$ для $\forall t_0$
   2. Раз $\forall t_0$, то можем 0 убрать: $\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ - ускорение однозначно определяется положением системы
4. Инерциальная система: если $\vec{f} = 0$, то $\ddot{\vec{r}}_i = 0$
5. Масса точки $P_i : m_i$
6. Сила, действующая на $P_i : \vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = m_i \vec{f}_i = \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$
7. Преобразования Галилея:

$$\begin{matrix} \vec{r} \to \vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + A\vec{r} \\ t \to t' = t + t_0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \vec{r}_0 = const \\ \vec{v}_0 = const \\ A = (A^T)^{-1} = const \end{matrix}$$

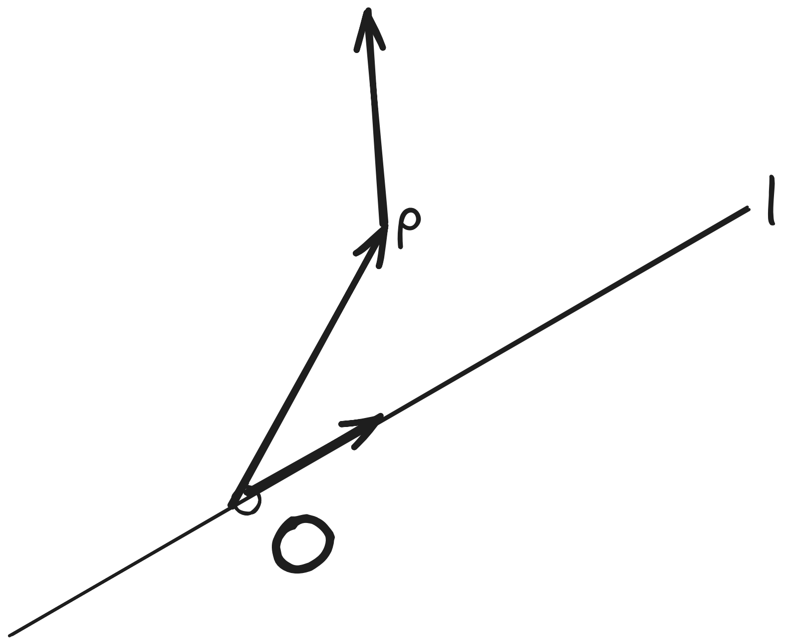
8. Принцип относительности: уравнения движения замкнутой системы инвариантны относительно преобразований Галилея:

$$\vec{F}'(\vec{r}', \frac{d}{dt'}\vec{r}', t') = \vec{F}(\vec{r}', \frac{d}{dt'}\vec{r}', t')$$

9. Закон равенства действия и противодействия: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}, \quad \vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_j - \vec{r}_i$
10. Принцип суперпозиции: $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(i)} + \vec{F}_e^{(i)}$
    1. $\vec{F}_i^{(i)}$ - внутренние силы, $\vec{F}_i^{(i)} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}^{(i)}$
    2. $\vec{F}_i^{(i)}$ - внешние силы
11. Внутренние силы не зависят от времени и скоростей: $\vec{F}_{ij}^{(i)} = \vec{F}_{ij}^{(i)}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$
12. Переход в неинерциальную систему:

$$m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = \vec{F}_i + \vec{F}^{пер} + \vec{F}_i^{кор}$$

    1. $\vec{F}^{пер} = -m_i \vec{W}_i^{пер} = -m_i(\vec{W}_{O'} + [\vec{\varepsilon}_{пер} \times \vec{\rho}] + [\vec{\omega}_{пер} \times [\vec{\omega}_{пер} \times \vec{\rho}]])$
    2. $\vec{F}_i^{кор} = -m_i \vec{W}_i^{кор} = -2m_i [\vec{\omega}_{пер} \times \dot{\vec{\rho}}]$



13.

14. Момент силы относительно полюса O : $\vec{M}_O = [\vec{r} \times \vec{F}]$

15. Момент силы относительно оси (любой её точки): $M_l = (\vec{M}_O, \vec{l})$

16. Элементарная работа: $(\vec{F}, d\vec{r})$, где $d\vec{r}$ - элементарное перемещение
    1. Иногда обозначают dA, но это не всегда полный полный дифференциал некой функцией
    2. Полная работа: $A = \int_\gamma (\vec{F}, d\vec{r})$

17. Мощность: $W = (\vec{F}, \vec{v})$

18. Классификация сил, действующая на материальную точку
    1. Стационарная сила (не зависит от t): $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$
        1. Диссипативная сила: $(\vec{F}, \vec{v}) \leq 0$
        2. Гироскопическая сила: $(\vec{F}, \vec{v}) = 0$
    2. Позиционная сила / силовое поле (не зависит от $\vec{v}$): $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$
        1. Потенциальная сила: $\exists U(\vec{r}, t) : \nabla U = \vec{F}$, здесь U - силовая функция, $\Pi = -U$ - потенциальная энергия
    3. Консервативная сила (не зависит от $t, \vec{v}$): $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
    4. Примеры:
        1. Сухая сила трения: $\vec{F} = -kN\vec{v}/|\vec{v}|, \quad |\vec{v}| \leq 0$ - диссипативная сила
        2. Вязкая сила трения: $\vec{F} = -\beta\vec{v}$ - диссипативная сила
        3. Сила инерции Кориолиса: $\vec{F}^{кор} = -2[\vec{\omega} \times \vec{v}]$ - гироскопическая сила
        4. Сила тяжести: $\vec{F} = -mg\vec{e}_Z = \frac{\partial}{\partial x}u\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}u\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}u\vec{e}_z$, где $u = -mgz, \quad \Pi = mgz$ - потенциальная сила
        5. Любая сила по направлению: $\vec{F} = F(x,t)\vec{e}_x \quad \to \Pi = -\int F(x,t)dx$ - потенциальная сила
            1. Замечание: в общем виде $\Pi = -\int (\vec{F}, d\vec{r})$ (если интеграл существует)
        6. Сила гравитации: $\vec{F} = -\mu\vec{r}/r^3$ - потенциальная сила
        2. Найдём потенциал: $\int(\vec{F}, dr) = -\int \mu/r^3(\vec{r}, d\vec{r}) = -\int \mu/r^3 d(\vec{r}, \vec{r})/2 = -\int \mu/r^2 dr = \mu/r$

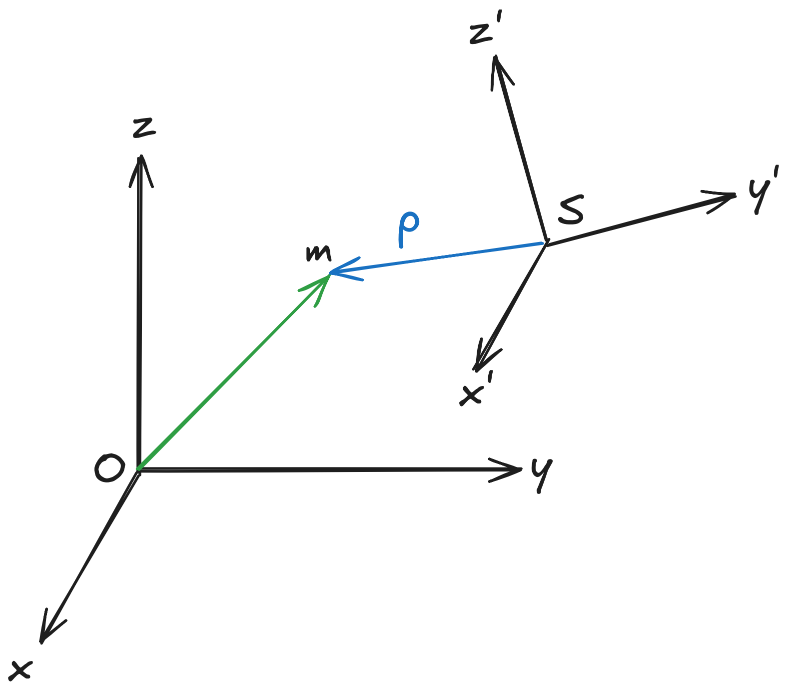
19. Критерий потенциальности (□ равенство двойных производных потенциальной функции ■):

$$\textit{Сила} \;\; \vec{F}(\vec{r}, t) = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y + F_z\vec{e}_z \;\; \textit{потенциальна} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

20. ↳ Утверждение: *стационарная* сила потенциальна (равно, консервативна) $\iff$ работа силы по $\forall$ замкнутому контуру равна 0:

$$\text{Сила } \vec{F}(\vec{r}) \text{ потенциальна} \iff \oint_C (\vec{F}, d\vec{r}) = 0 \ \ \forall C \in \mathbb{R}^3$$

21. Главный вектор внешних сил: $\vec{F} = \vec{F}^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}$
22. Главный момент внешних сил: $\vec{M} = \vec{M}^{(e)} = \sum_i \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right]$
23. Свойства внутренних сил:
    1. $\sum_i \vec{F}_i^{(i)} = 0$
    2. $\sum_i \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)}\right] = 0$ (относительно любого полюса)
    3. Мощность внутренних сил в общем случае отлична от 0 (внутренние силы могут совершать работу)
    4. Для твёрдого тела мощность внутренних сил равна 0
    5. Внутренние силы - потенциальны, т.е. $\exists \Pi(\vec{r}_1, \dots \vec{r}_N, t): \ \ \nabla_{\vec{r}_i}\Pi = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i}\Pi = -\vec{F}_i, \ \ \Pi = \sum_{j,k<j} \Pi_{jk}, \ \ \Pi_{jk} = -\int F_{jk}(\rho)d\rho$
24. Импульс системы: $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i$
25. Кинетический момент / момент импульса относительно полюса $O: K_0 = \sum_i [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i]$
26. Кинетический момент относительно оси: $K_l = \left(\vec{K}_0, \vec{l}\right)$
27. Кинетическая энергия системы: $T = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i^2$
28. Центр масс системы: $S: \vec{r}_S = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{r}_i$
    1. Тогда $\vec{p} = m\vec{v}_S$
29. Система отсчёта Кёнига - СО, которая движется поступательно вместе с центром масс системы, а оси параллельны ИСК
    1. СО не вращается, поэтому $\frac{d}{dt}\vec{u} = \dot{\vec{u}}$



30.
31. Кинетический момент Кёнига: $\vec{K}_{\text{кён}} = \sum \left[\vec{\rho}_{ij} \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right]$
32. Кинетическая энергия Кёнига: $T_{\text{кён}} = \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$
33. Формулы Кёнига:

$$\vec{K}_O = [\vec{r}_S \times m\vec{v}_s] + \vec{K}_{\text{кён}}, \qquad T = \frac{1}{2} m v_S^2 + T_{\text{кён}}$$

34. Основные теоремы динамики в инерциальных системах отсчёта

35. Теорема (об изменении импульса): $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

36. Теорема (о движении центра масс): $m\vec{W}_S = \vec{F}$

1. Следствие 1: $\vec{F} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{p} = const$
2. Следствие 2: $F_x = (\vec{F}, \vec{e}_x) = 0 \quad \rightarrow \quad p_x = const$

37. Теорема (об изменении кинмомента в случае неподвижного полюса): $\dot{\vec{K}}_o = \dot{M}_o, \quad (\vec{v}_o \equiv 0)$

1. Следствие 1: $\vec{M}_o = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{K}_o = const$
2. Следствие 2: $K_z = M_z \quad (\dot{\vec{e}}_z = 0)$ (Теорема об изменении кинмомента в случае неподвижной оси)
3. Следствие 3: $M_z = 0 \quad \rightarrow \quad K_z = const$

38. Формула пересчёта кинмомента при смене полюса: $\vec{K}_B = \vec{K}_A + \left[\vec{p} \times \overline{AB}\right]$

39. Формула пересчёта момента при смене полюса: $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \left[\vec{F} \times \overline{AB}\right]$

40. Теорема (об изменении кинмомента в случае подвижного полюса): $\dot{\vec{K}}_B = \vec{M}_B + [\vec{p} \times \vec{v}_B]$

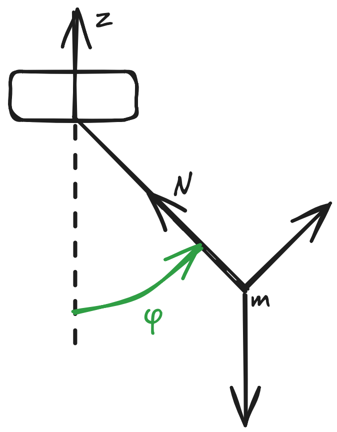
1. Следствие: $\vec{K}_S = \sum \left[\vec{\rho}_i \times m_i(\vec{v}_S + \dot{\vec{\rho}}_i)\right] = 0 + \vec{K}_{кён}$ ($\vec{K}_S$ - кинмомент относительно ЦМ)

41. Теорема Кёнига 1: $\dot{\vec{K}}_{кён} = \vec{M}_S$ ($\vec{M}_S$ - главный момент внешних сил относительно ЦМ)

42. Теорема (об изменении кинетической энергии): $\dot{T} = \sum \left(\vec{F}_i, \vec{v}_i\right) = \sum \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}, \vec{v}_i\right)$

1. То же самое в форме дифференциала: $d\dot{T} = \sum \left(\vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)}, d\vec{r}_i\right)$
2. Следствие 1: если все силы, действующие на систему, консервативны (силы потенциальные и стационарные), то полная механическая энергия системы сохраняется при любом её движении (закон сохранения полной механической энергии)
   1. $\square \quad \exists \Pi(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t) : \vec{F}_i = -\nabla_{r_i}\Pi = -\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i}\Pi$
   2. $\dot{T} = \sum \left(\vec{F}_i, \vec{v}_i\right) = \sum - \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i}\Pi, \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_i\right) = -\dot{\Pi}$
   3. $T + \Pi = h = const \;\blacksquare$

43. Пример: математический маятник

44. 

1. $\vec{mg}$ потенциальна с потенциалой энергией $\Pi = mgz = -mgl\cos\varphi$
2. Сила реакции связи потенциальной назвать уже нельзя, но работа этой силы нулевая: $\left(\vec{N}, d\vec{r}\right) = 0$
3. Тогда можно показать, что $T + \Pi = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = h = const$
4. Замечание:
   1. Уравнение движение маятника: $ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi$
   2. Интегрируем $ml\ddot{\varphi}\dot{\varphi} + mg\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$, получаем $\frac{1}{2}ml\dot{\varphi}^2 - mg\cos\varphi = const = h/l$

45. Основные теоремы динамики в неинерциальных системах отсчёта

46. Если переходим в неинерциальную СК, то ускорение $\vec{W}_i$ в ней считается как:

$$m_i\vec{W}_i = \vec{F}_i + \vec{F}_i^{пер} + \vec{F}_i^{кор}, \quad \vec{F}_i^{пер} = -m_i\vec{W}_i^{пер}, \quad \vec{F}_i^{кор} = -2m_i[\vec{\omega}^{пер} \times \vec{v}_i]$$

47. Главный вектор переносных сил $\vec{F}^{пер} = \sum \vec{F}_i^{пер}$

48. Главный вектор кориолисовых сил $\vec{F}^{кор} = \sum \vec{F}_i^{кор}$

49. Момент переносных сил относительно точки: $\vec{M}_0^{пер} = \sum \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{пер}\right]$

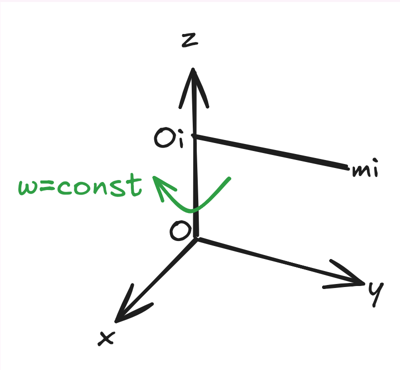
50. Момент кориолисовых сил относительно точки: $\vec{M}_0^{кор} = \sum \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{кор}\right]$

51. Пересчёт формул

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} + \vec{F}^{пер} + \vec{F}^{кор}, \qquad \dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_o + \vec{M}_o^{пер} + \vec{M}_o^{кор}, \qquad \dot{T} = \sum \left(\vec{F}_i, \vec{v}_i\right) + \sum \left(\vec{F}_i^{пер}, \vec{v}_i\right)$$

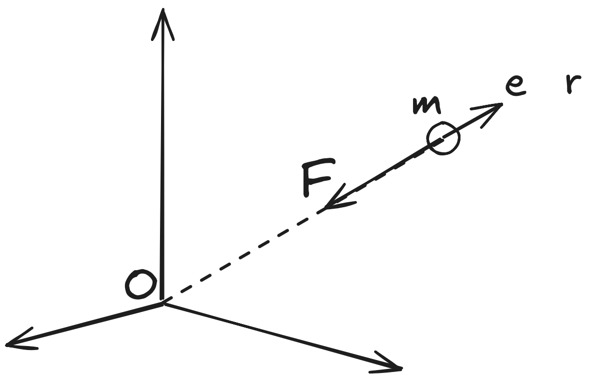
   1. $\left(\vec{F}_i^{кор}, \vec{v}_i\right) = 0$

52. Пример: равномерное вращение вокруг неподвижной оси

   2. 

   3. На точку m_i действуют силы инерции
      1. $\vec{F}_i^{пер} = -m_i\vec{W}_i^{пер} = -m_i\left(\vec{W}_{O_i} + \left[\vec{\varepsilon} \times \overline{O_iP_i}\right] - \omega^2\overline{O_iP_i}\right) = \omega^2 m_i(x_i\vec{e}_x - y_i\vec{e}_i)$
         1. Можно ли записать в виде: $\vec{F}_i^{пер} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\Pi^{пер}\vec{e}_x - \frac{\partial}{\partial y_i}\Pi^{пер}\vec{e}_y$?
         2. Да, можно: $\Pi^{пер} = -\omega^2\sum m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right)$
      2. Если $\vec{F}_i$ потенциальна и стационарна (консервативна), то $T + \Pi + \Pi^{пер} = h = const$

53. Движение материальной точки в центральном стационарном поле

54. 

55. $\vec{F} = F(r)\vec{e}_z, \quad \vec{e}_z = \vec{r}/|\vec{r}|$

56. Законы сохранения:
   1. Сохранение энергии:
   $\Pi = -\int(\vec{F}, d\vec{r}) = -\int\frac{F(r)}{r}(\vec{r}, dr) = -\int\frac{F(r)}{r}d(\frac{r^2}{2}) = -\int\frac{F(r)}{r}rdr = -\int F(r)dr, \quad \frac{\partial}{\partial t}\Pi = 0 \quad \rightarrow \quad T + \Pi$
   2. Сохранение кинетического момента: $\dot{\vec{K}}_o = \vec{M}_0 = \left[\vec{r} \times F(r)\frac{\vec{r}}{r}\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{K}_o = \vec{K} = const$
      1. Следствие 1: траекторией точки под действием центральной силы всегда является плоская кривая

1. $\square$ $[\vec{r} \times m\vec{v}] = \vec{k} = const$
2. Проведём плоскость $\mathbf{\Pi}$: $\mathbf{\Pi} \perp \vec{k}, \ \ \vec{r}(0) \in \mathbf{\Pi}$
3. Тогда $\vec{r}(t) \in \mathbf{\Pi}$ $\blacksquare$

2. Тогда можно ввести r, φ - полярные координаты в плоскости $\mathbf{\Pi}$

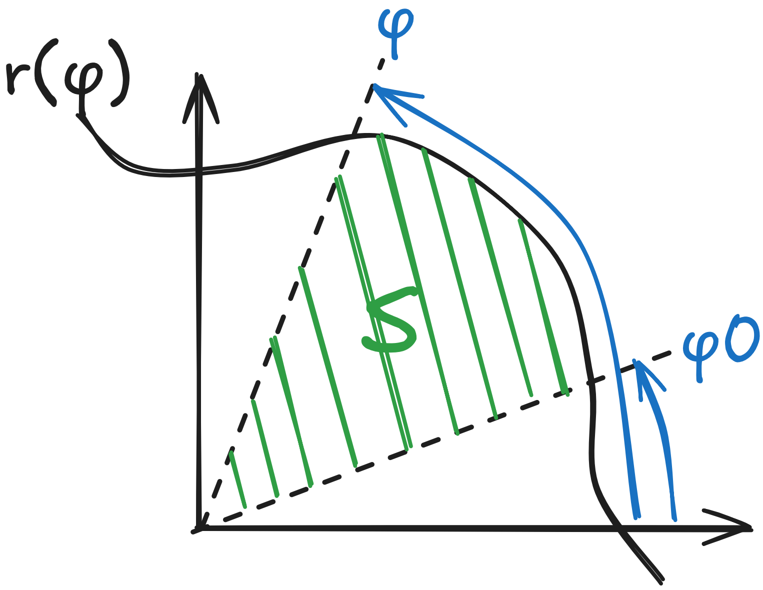
4. $\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

5. Тогда кинетический момент

$\vec{k} = [\vec{r} \times m\vec{v}] = m[r\vec{e}_r \times \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi] = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z, \ \ \vec{e}_z = [\vec{e}_r \times \vec{e}_\pi]$

6. $vk = const \quad \to \quad r^2\dot{\varphi} = c = const$

3. Следствие 2 (2-й закон Кеплера): при движении точки в центральном поле имеет место закон площадей



1. $S = \iint d = \iint r dr d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{2} r^2 d\varphi$
   1. $d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\varphi\vec{e}_\varphi$, где $rdrd\varphi$ и есть элементарная площадь
   2. $r \in [0, r(\varphi)], \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi]$
2. $\dot{S} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}S = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \frac{1}{2}c = \sigma$ - секторная скорости

4. Замечание: если $c = 0$, то движение по прямой. Далее, считаем $c \neq 0$

57. ↳ Теорема (формы Бине):

$$v^2 = c^2\left(\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right), \qquad F(r) = -\frac{mc^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)$$

1. 1. $\square$ $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{c}{r^2} = -c\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)$ $\blacksquare$
2. 2. $\blacksquare$ $\vec{W} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi = \vec{W}_r\vec{e}_r + \vec{W}_\varphi\vec{e}_\varphi$
3. $2\vec{W}_\varphi = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = \frac{d}{dt}c = 0$
4. $F = mW_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = m\left(-c\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{c}{r^2} - r\frac{c^2}{r^4}\right)$ $\blacksquare$
5. Введём обозначения $v = 1/r, \ \ \frac{d}{d\varphi}(*) = (*)'$. Тогда 2-е уравнение переход в дифференциальное уравнение Бине:

$$F(\frac{1}{u}) = -mc^2u^2(u'' + u)$$

   1. Позволяет легко найти уравнение траектории, потому что тут зависимость $r(\varphi)$

58. Нахождение траектории:

6. $T + \Pi = h = const, \ \ T = \frac{mv^2}{2}$

7. Применяем 1-ю формулу Бине: $\frac{m}{2}c^2(u')^2 + \Pi^* = h$, где мы обозначили $\Pi^* = \frac{mc^2}{2}u^2 + \Pi(\frac{1}{u})$ (приведённая потенциальная энергия)
8. Тогда $(u')^2 = \frac{2}{mc^2}\left(h - \Pi(\frac{1}{u})\right)$ - уравнение с разделяющимися переменными
9. Уравнение траектории в квадратурах: $\pm\int\frac{du}{\sqrt{h-\Pi(\frac{1}{u})}} = \frac{2}{mc^2}(\varphi - \varphi_0)$

10. Закон движения по этой траектории берётся из закона площадей:
$\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2(\varphi)} \quad \to \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} r^2(\tilde{\varphi})d\tilde{\varphi} = c(t - t_0)$