Основные понятия теории устойчивости движения. Устойчивость по Ляпунову. Асимптотическая устойчивость. Функции Ляпунова. Общие теоремы второго метода Ляпунова.

Равновесие механических систем.

Рассмотрим систему материальных точек m_i, $i = \overline{1, N}$.
Положения точек зададим в инерциальной системе отсчёта $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^3$, тогда положение всей системы есть $\vec{r} = [x_1, \dots z_N]^T \in \mathbb{R}^{3N}$.
На систему действуют силы $\vec{F}_i$, $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = [F_{x1}, \dots F_{zN}]^T \in \mathbb{R}^{3N}$.

Положение равновесия

Положение механической системы $\vec{r}_0$, если система может находится в этом положении бесконечно долго $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0$, будучи помещена в него $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ без начальной скорости $\dot{\vec{r}}(0) = \vec{0}$.

Замечание: $\vec{r}_0$ – положение равновесия, а функция времени $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0$ – состояние равновесия. Шарик на плоскости катится по положениям равновесия, но сам в состоянии равновесия не находится. По умолчанию, равновесие – состояние равновесия.
На систему наложены связи геометрические $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}$, и дифференциальные $f_\beta(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \left(\vec{g}(\vec{r}, t), \dot{\vec{r}}\right) + h_p(\vec{r}, t) = 0, \quad \beta = \overline{m+1, k}$. Геометрические связи можно записать в дифференциальной форме: $\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}}, \dot{\vec{r}}\right) + \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$.
Виртуальность связей: $\Phi \delta \vec{r} = 0$, где $\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{1k} & \dots & g_{3Nx} \end{bmatrix}$
Идеальность связей: $\delta A = \left(\vec{R}, \delta \vec{r}\right) = 0$

Принцип виртуальных перемещений (общее уравнение статики)

Если связи идеальны, то некоторое положение системы $\vec{r}_0$ является её положением равновесия $\iff$ работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении, выводящим систему из соответствующего состояния равновесия равна нулю

$$\left(\vec{F}(\vec{r}_0, \dot{\vec{r}} = 0, t), \delta \vec{r}\right) = 0$$

Доказательство

$\vec{r}(t)$ – закон движения при идеальных связях $\iff$ $\left(M\ddot{\vec{r}} - \vec{F}, \delta \vec{r}\right) = 0$ (Принцип Даламбера-Лагранжа), $M = \operatorname{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots m_N, m_N, m_N)$
Тогда $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0$ – движение системы $\iff$ $\left(0 - \vec{F}, \delta \vec{r}\right) = 0$

Замечание: когда связи стационарны, то положение равновесия $\iff$ работа всех сил на действительном перемещении равна нулю, а это есть дифференциал кинетической энергии.

Равновесие голономных систем.

Случай 1: связи идеальны и голономны
Введём конфигурационное пространство $\vec{r} \in \Sigma = \{\vec{r} : f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \quad \alpha = \overline{1, m}\}$. На этом множестве

введём локальные координаты $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}, t)$, где $\vec{q} = [q_1, \dots q_n]^T$, n — число степеней свободы. Каждой координате $\vec{q}$ соответствует обобщённая сила $\vec{Q} = \vec{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$
Применим принцип виртуальных перемещений: $\left(\vec{F}, \delta\vec{r}\right) = \left(\vec{Q}, \delta\vec{q}\right) = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i$. Если связи только геометрические, обобщённые координаты $\delta q_1, \dots \delta q_n$ независимы. Тогда обобщённые силы в соответствующем состоянии равновесия равны нулю $Q_i = 0$.

Случай 2: связи идеальны, голономны, и силы потенциальны (лагранжевы системы)
$\exists \Pi(\vec{q}, t): \quad \vec{Q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{q}}$
Применим принцип виртуальных перемещений: положения является положением равновесия, если оно является критической точкой потенциальной энергии в каждый момент времени $\frac{\partial \Pi(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}}|_{\vec{q}=\vec{q}_0} = 0$.

Замечание: если $\vec{r}_0$ — положение равновесия $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0$, то $\vec{q} \equiv \vec{q}_0$. Обратное неверно.

Случай 3: связи идеальны, голономны и стационарны, силы потенциальны и не зависят от времени $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ (натуральная система)
Здесь, из $\vec{q} \equiv \vec{q}_0$ следует $\vec{r}(t) \equiv \vec{r}_0$ из-за того, что $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q})$

Положение равновесия

q_0, если $\vec{q} \equiv \vec{q}_0$ — решение уравнений Лагранжа

Утверждение

$\vec{q} = \vec{q}_0$ — положение равновесия натуральной системы $\iff$ $\vec{q}_0$ — критическая точка $\Pi(\vec{q})$

Доказательство 1

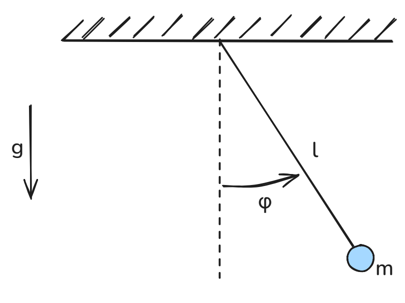
Из предыдущего случая

Доказательство 2

Для натуральной системы $L = \frac{1}{2}\left(A(\vec{q})\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\right) - \Pi(\vec{q})$, где A симметрическая, положительно определённая.
Посчитаем уравнения Лагранжа для $\vec{q} \equiv \vec{q}_0$: $\left(A\dot{\vec{q}}\right)^{\cdot}|_{\vec{q}=\vec{q}_0} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{q}}\left(A\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\right)|_{\vec{q}=\vec{q}_0} + \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{q}}|_{\vec{q}=\vec{q}_0} = 0 - 0 + \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{q}}|_{\vec{q}=\vec{q}_0} = 0$

Замечание: (свойство консервативности) в натуральной системе $\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad T = T_2 \quad \Rightarrow$ обобщённый интеграл энергии: $T + \Pi = h = \text{const}$

Пример: математический маятник

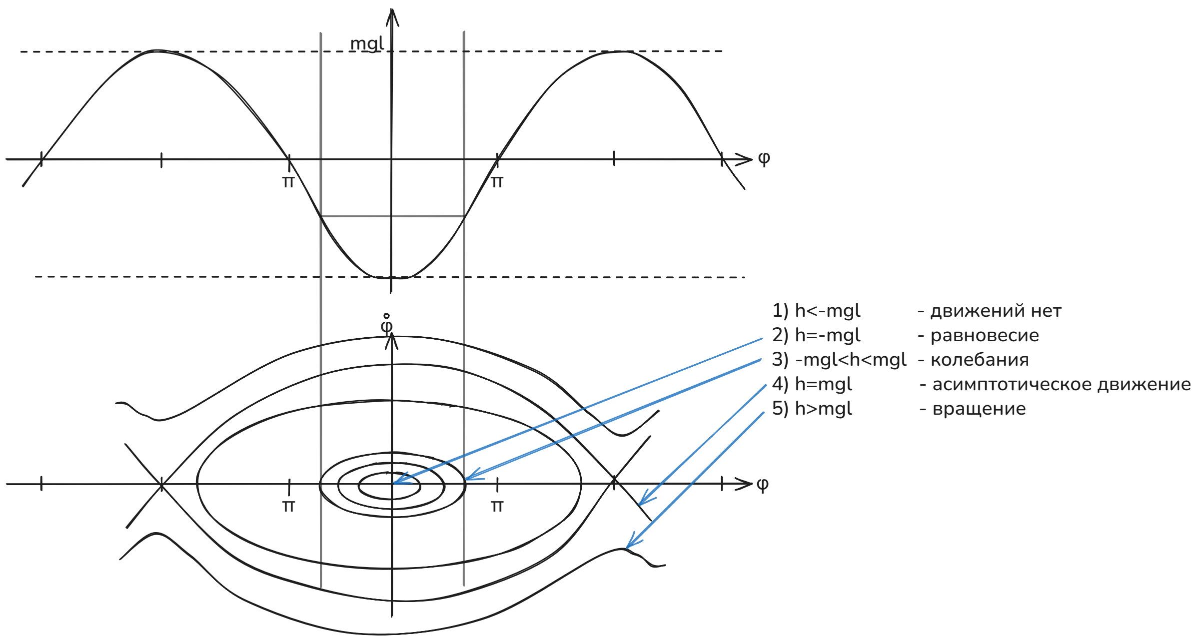


Система натуральна. Потенциальная энергия: $\Pi = -mgl\cos\varphi$

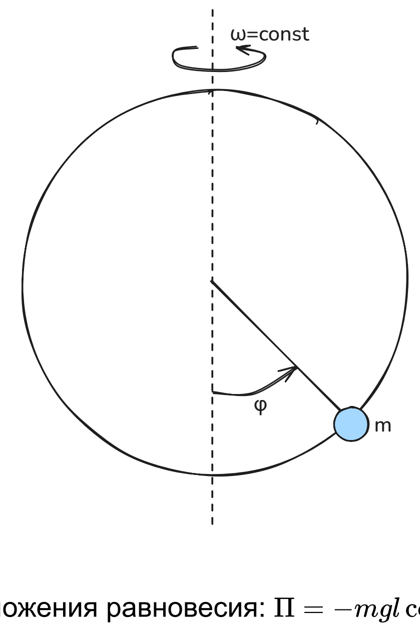
Критические точки: $\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = mgl\sin\varphi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \pi k, \quad k \in \mathbb{R}$

Посмотрим на свойство консервативности: $T + \Pi = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \Pi(\varphi) = h = \text{const}$.

Отсюда $\dot{\varphi} = \pm\alpha\sqrt{h - \Pi(\varphi)}$, где $\alpha^2 = \frac{2}{ml^2}$



Пример: маятник во вращающейся плоскости



Положения равновесия: $\Pi = -mgl\cos\varphi, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \pi k$

Положения относительного равновесия: $L = T - \Pi = \frac{m}{2}\left((l\dot{\varphi})^2 + (l\sin\varphi\omega)^2\right) - \Pi$

Заметим, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Тогда $T_2 - T_0 + \Pi = h = \text{const} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{ml^2}{2}\sin^2\varphi\omega^2 + \Pi$

Введём "изменённую" потенциальную энергию $\Pi^* = -\frac{ml^2}{2}\sin^2\varphi\omega^2 + \Pi = -mgl\cos\varphi - \frac{ml^2}{2}\sin^2\varphi\omega^2$

Тогда $T_2 + \Pi^* = h = const, \quad L = T_2 - \Pi^*(\varphi)$. Существует такая натуральная система, у которой $T = T_2$, а $\Pi = \Pi^*$, и уравнения движения такой системы с нашей совпадают.

Будем искать положения равновесия изменённой системы:

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \varphi = \pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \varphi = \pm\arccos\frac{g}{l\omega^2} + 2\pi k & если\ \ \omega^2 > \frac{g}{l} \end{cases}$$

Остановился 58:50