

1. > Динамическая система:

1. Википедия: множество элементов X , для которых задана функциональная зависимость между временем и положением в фазовом пространстве каждого элемента системы.
2. Большая российская энциклопедия: механическая система с конечным числом степеней свободы.
3. (X, T, ϕ) – математическая модель реальной системы, состояние которой эволюционирует со временем.

1. X : пространство состояний – множество всех возможных состояний системы.

1. Обязательно непустое множество

2. T : множество моментов времени – моноид относительно операции сложения

1. Время $t \in T$ (эволюционный параметр)

2. Начальный момент времени $t = 0$

3. Если T – группа, ДС обратима

4. ДС с непрерывным временем:

1. Поток, если $T = \mathbb{R}$

2. Полупоток, если $T = [0, +\infty)$

5. ДС с дискретным временем:

1. Каскад, если $T = \mathbb{Z}$

2. Полукаскад, если $T = \mathbb{Z} \cup \{0\}$

3. $\phi^t : X \rightarrow X$: движение – действие T на X

1. Тожественное преобразование: ϕ^0

2. $\phi^{s+t} = \phi^s \circ \phi^t$

3. Обозначения: $\phi_x(t) = \phi^t(x)$

4. Траектория точки $x : \{\phi_x(t)\}$

5. Образ множества в момент времени: $\phi^t(S)$

2. Обычная динамическая система; система с параметризацией правой части:

$$\dot{x} = f(x); \quad \dot{x} = f(x, \mu)$$

3. Аналитическая механика – набор формализмов (Лагранжев, Гамильтонов и т.д.), более общо описывающих механические системы: применимы не только к системам из классической механики и даже не только к механическим системам

4. Особенности подхода в теории динамических систем:

1. Целостность представления о ДС – рассматривается не отдельные траектории, а поведение системы в целом
2. Глобальность исследования – анализируется поведение системы на бесконечном интервале времени
3. Качественные (геометрические) методы анализа

5. Далее будем рассматривать обратимые непрерывные ДС на гладких многообразиях (в том числе в $\mathbb{R}^n$)

6. > Движение – $\phi^t(x) : M \rightarrow M$ - однопараметрическая группа диффеоморфизмов гладкого многообразия

1. Фазовые траектории в пространстве состояний формируют фазовый портрет
2. Для лагранжевой механической системы пространство состояний – это фазовое пространство (пространство обобщённых координат и скоростей)

7. > Неподвижная точка $x_0 : \phi^t(x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

8. > ϕ -инвариантное множество $S \subset M$ (ИМ):

$$\forall x \in S, \quad \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow \phi^t(x) \in S \quad (m.e. \quad \phi^t(S) = S)$$

7. Примеры инвариантных множеств:

1. неподвижная точка

2. многообразие M

3. замкнутая траектория $\phi^T(x_0) = x_0$, где T - период. Тогда $\{\phi_{x_0}(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ – цикл, периодическая орбита

8. Свойства инвариантных множеств:

1. если A, B инвариантны, то $A \cup B$ и $A \cap B$ тоже инвариантны

2. если A инвариантно, то $M \setminus A$ тоже инвариантно

3. каждое инвариантное множество состоит из целых траекторий: если $x \in A$, то $\{\phi_x(t)\} \subseteq A$

4. любое объединение целых траекторий системы инвариантно

5. если A инвариантно, то $\bar{A}$ тоже инвариантно

2. Доказательство:

1. $\square$ возьмём точки внутри и вне границы: $z \in \partial A \rightarrow \exists U(z) : x, y \in U(z), x \in A, y \in M \setminus A$
2. такие, что $\phi_x(t) \in \phi^t(U)$, $\phi_y(t) \in \phi^t(U)$ (а вот тут я не понял почему)
3. по свойству (2), $\phi_x(t) \in A$, $\phi_y(t) \in M \setminus A$
4. значит, $\phi_z(t) \in \partial\{\phi^t(A)\} \forall t \in \mathbb{R}$ ■

9. > ω -предельная точка траектории $\{\phi_x(t)\}$ – такая $x_* \in M$, что

$$\forall U(x_*), \forall T \in \mathbb{R} \rightarrow \exists t > T : \phi_x(t) \in U(x_*)$$

10. > α -предельная точка: аналогично для $t < T$

11. > Ω_x – ω -предельное множество траектории $\{\phi_x(t)\}$: множество всех ω -предельных точек;

1. Альтернативное определение: $\Omega_x = \bigcap_{s \in \mathbb{R}} \overline{\{\phi_x(t) : t > s\}}$

2. Свойства предельных множеств:

1. Из определений, $\Omega_x \subset \overline{\{\phi_x(t)\}}$, $A_x \subset \overline{\{\phi_x(t)\}}$

2. $\overline{\{\phi_x(t)\}} = \{\phi_x(t)\} \cup A_x \cup \Omega_x$

1. Доказательство:

1. $\square$ $\text{Int}\{\phi_x(t)\} \subset \{\phi_x(t)\}$

2. Если $y \in \partial\{\phi_x(t)\}$ и $y \notin \{\phi_x(t)\}$, то $y \in A_x \cup \Omega_x$ (доказать)

3. Отсюда: $\overline{\{\phi_x(t)\}} \subset \{\phi_x(t)\} \cup A_x \cup \Omega_x$

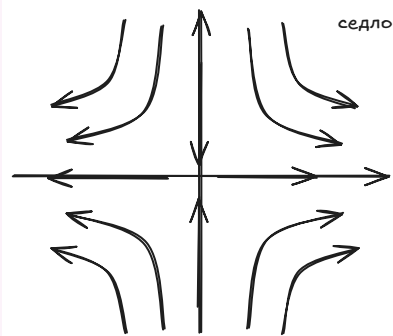
4. Из 1) и 2) следует доказуемое ■

3. Ω_x, A_x – замкнутые множества (доказать)

4. Ω_x, A_x – инвариантные множества (доказать)

12. $\odot$ Пример: периодическая орбита является для самой себя α - и ω -предельными множествами

13. $\odot$ Пример: гиперболический поворот $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$



1. Для $p_0 = (1, 0) \rightarrow \phi^t(p_0) = (e^t, 0)$

1. $(0, 0)$ – α -предельная точка, ω -предельных точек нет

2. Для $p_0 = (0, 1) \rightarrow \phi^t(p_0) = (0, e^{-t})$

1. $(0, 0)$ – ω -предельная точка, α -предельных точек нет

14. Предельные множества – инвариантные множества, замкнутые множества.

15. Для любой траектории на компактном многообразии её α - и ω -предельные множества непусты, компактны и связны

16. > Рекуррентная точка $x \in M$:

$$\forall U(x), \forall T \in \mathbb{R} \rightarrow \exists t > T : \phi^t(x) \in U(x)$$

1. Свойство: $x \in \Omega_x$

17. > Траектория $\{\phi_x(t)\}$ называется устойчивой по Пуассону в положительном (отрицательном) направлении, если: $x \in \Omega_x$ ($x \in A_x$)

18. > Траектория $\{\phi_x(t)\}$ называется уходящей в положительном (отрицательном) направлении, если:

$$\Omega_x = \emptyset \quad (A_x = \emptyset)$$

19. > Траектория $\{\phi_x(t)\}$ уходящая, если: $\Omega_x = \emptyset$, $A_x = \emptyset$

20. > Траектория $\{\phi_x(t)\}$ называется асимптотической в положительном (отрицательном) направлении, если

$$\Omega_x \neq \emptyset \quad \text{и} \quad x \notin \Omega_x \quad (A_x \neq \emptyset, \quad x \notin A_x)$$

21. > Траектория $\{\phi_x(t)\}$ **двоякоасимптотическая**, если

$$\Omega_x \neq \emptyset, \quad A_x \neq \emptyset, \quad x \notin \Omega_x \cup A_x$$

22. Классификация траекторий ДС:

1. Особые траектории – неподвижные точки и замкнутые траектории (циклы)
2. Траектории, устойчивые по Пуассону
3. Траектории, устойчивые по Пуассону в (+) и асимптотические в (-)
4. Траектории, устойчивые по Пуассону в (-) и асимптотические в (-)
5. Двоякоасимптотические траектории
6. Уходящие траектории
7. Траектории, уходящие в (+) и асимптотические в (-)
8. Траектории, уходящие в (-) и асимптотические в (+)
9. Траектории, устойчивые по Пуассону в (+) и уходящие в (-)
10. Траектории, устойчивые по Пуассону в (-) и уходящие в (+)

23. ☉ Пример: обмотка двумерного тора $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ с постоянными частотами:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \omega_1 \\ \dot{\varphi}_2 = \omega_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = (\varphi_1^0 + \omega_1 t) \bmod 2\pi \\ \varphi_2 = (\varphi_2^0 + \omega_2 t) \bmod 2\pi \end{cases}$$

1. Рациональная обмотка тора: $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$
2. Иррациональная обмотка тора: $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$
 1. Обмотка – множество, устойчивое по Пуассону

24. > **Неблуждающая** точка $x \in M$:

$$\forall U(x), \quad \forall T \in \mathbb{R} \rightarrow \exists t > T: \phi^t(U) \cap U \neq \emptyset$$

25. > Неблуждающее / блуждающее множества ДС: NW / W

1. Рекуррентные точки R – неблуждающие $\bar{R} \subseteq NW$
2. Если x_0 – неблуждающая точка, то $\forall$ точка её траектории тоже неблуждающая
 1. Доказательство:
 1. $\square \quad x_1 = \phi^{t_1}(x_0)$
 2. $U(x_1) = \phi^{t_1}(U(x_0))$
 3. $U(x_0), T$ – произвольные
 4. $T' = T + t_1$
 5. $\exists t_2 > T': \phi^{t_2}(U(x_0)) \cap U(x_0) \neq \emptyset$, так как x_0 – неблуждающая
 6. $\phi^{t_1}(\phi^{t_2}(U(x_0))) \cap \phi^{t_1}(U(x_0)) \neq \emptyset$
 7. $\phi^{t_2}(U(x_1)) \cap U(x_1) \neq \emptyset$
 8. $t_2 > T' > T$ ■
3. Неблуждающее множество инвариантно
4. Если x_0 – неблуждающая точка в положительном направлении ($\exists t > T$), то она неблуждающая и в отрицательном (при $t < T$)
 1. Свойство неблуждаемости симметрично по времени
5. Неблуждающее множество замкнуто
6. Множество W инвариантно и открыто. В него могут входить уходящие траектории, двоякоасимптотические траектории и траектории, уходящие в одном направлении и асимптотические в другом
7. Любая траектория ДС на компактном многообразии M находится только на конечном интервале времени вне любой замкнутой окрестности своего ω -предельного (α -предельного) множества

26. ☉ Примеры неблуждающих множеств:

1. неподвижная точка
2. цикл
3. траектория, устойчивая по Пуассону (хотя бы в одном направлении)
4. предельное множество $\Omega(M)$ и $A(M)$ динамической системы

27. > **Предкомпакт** – подмножество топологического пространства, замыкание которого компактно

1. В евклидовом пространстве предкомпактность = ограниченность

28. > Точка $x \in M$ называется **устойчивой по Лагранжу**, если её траектория содержится в предкомпактном множестве

29. > Точка $x \in M$ называется **устойчивой по Лагранжу в положительном** (отрицательном) **направлении**, если её положительная (отрицательная) полутраектория содержится в предкомпактном множестве

30. > **Минимальное множество** – непустое, замкнутое, инвариантное множество, не имеющее собственного подмножества с этими свойствами

31. **Теорема** Биркгофа:

1. ↪ Замыкание устойчивой по Лагранжу в (+) (-) траектории содержит по крайней мере одно компактное минимальное множество. В полном метрическом пространстве каждая точка этого минимального множества – рекуррентная

32. > **Центр ДС** – максимальное замкнутое инвариантное множество, все точки которого неблуждающие NW в (???)

1. В компактном пространстве центр всегда непустой
2. Рекуррентные точки $\bar{R} \subset NW$ – в полном метрическом пространстве это и есть центр

33. > Компактное инвариантное множества A называется **притягивающим**, если существует изолирующая в (+) окрестность

$$\exists U(A) : A = \bigcap_{t=0}^{\infty} \phi^t(U)$$

1. Эквивалентные определения:

1. Имеет захватывающую окрестность
2. Имеет притягивающую окрестность
3. Устойчиво по Ляпунову и имеет открытый бассейн притяжения

34. > **Бассейн** притяжения $B(A)$ – множество точек, чьи ω -предельные точки содержатся в A

35. > Если компактное множество $T \subset X$ переводится потоком строго внутрь себя ($\phi^t(T) \subset T, t > 0$), то $\phi^{t_2}(T) \subset \phi^{t_1}(T), t_1 < t_2$ и $A = \bigcap_{t=0}^{\infty} \phi^t(T)$ – инвариантное множество, имеющее открытый бассейн притяжения, содержащий T , то T – **захватывающая окрестность** (англ. *trapping neighborhood*).

1. Очевидно, захватывающая окрестность – изолирующая

36. **Теорема** Милнор:

1. ↪ Компактное инвариантное множество имеет захватывающую окрестность $\iff$ у него есть изолирующая окрестность

37. > Множество A называется **устойчивой по Ляпунову**, если

$$\forall U(A) \rightarrow \exists V(A) \subset U(A) : \phi^t(V) \subset U, t > 0$$

38. > **Аттрактор** – минимальное притягивающее множество ($\iff$ содержит плотную орбиту)