Существование и единственность локального решения нелинейной ДС. Линеаризация.

1. Рассматривается система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$$

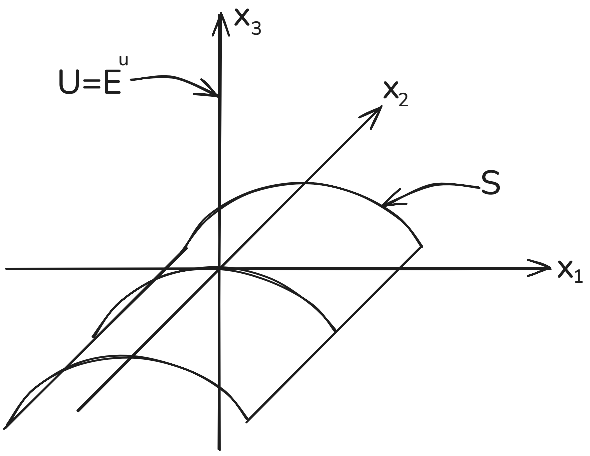
   1. x_0 – неподвижная точка ($\phi^t(x_0) = x_0$)
2. Линеаризованная система в окрестности положения равновесия x_0 :

$$\dot{x} = AX, \quad A = Df(x_0), \quad Df = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

3. Положение равновесия x_0 гиперболическое, если все собственные числа матрицы $Df(x_0)$ имеют ненулевую действительную часть
4. Далее будем считать $x_0 = 0$ (без ограничения общности)
5. Пример: $\begin{cases} \boldsymbol{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_1^2 \end{cases}$
   1. Единственное положение равновесия: $x = [0, 0, 0]$
   2. Линеаризованная матрица $A = Df(0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
   3. E^s-подпространство: плоскость $x_1 - x_2$
   4. E^u-подпространство: ось x_3
   5. Общее решение нелинейной системы:

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} + c_1^2(e^{-t} - e^{-2t}) \\ x_3(t) = c_3 e^{-t} + \frac{c_1^2}{3}(e^t - e^{-2t}) \end{cases}$$

   6. $c = [c_1, c_2, c_3] = x(0) = [x_1, x_2, x_3](t = 0)$
   7. $\lim_{t \to +\infty} \phi^t(c) = 0 \quad \iff \quad c_3 + \frac{c_1^3}{3} = 0$
      1. Устойчивое многообразие (имеет форму параболического цилиндра): $S = c \in \mathbb{R}^3 : \quad c_3 + \frac{c_1^3}{3} = 0$
      2. E^S касается S в начале координат (в данном случае, вдоль всей оси x_2)



   8. $\lim_{t \to -\infty} \phi^t(c) = 0 \quad \iff \quad c_1 = c_2 = 0$
      1. Неустойчивое многообразие: $U = c \in \mathbb{R}^3 : \quad c_1 = c_2 = 0$
      2. $E^u = U$

Теорема об устойчивом многообразии.

1. Теорема об устойчивом многообразии:
   1. ↳ Пусть ϕ^t – поток нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$, причём

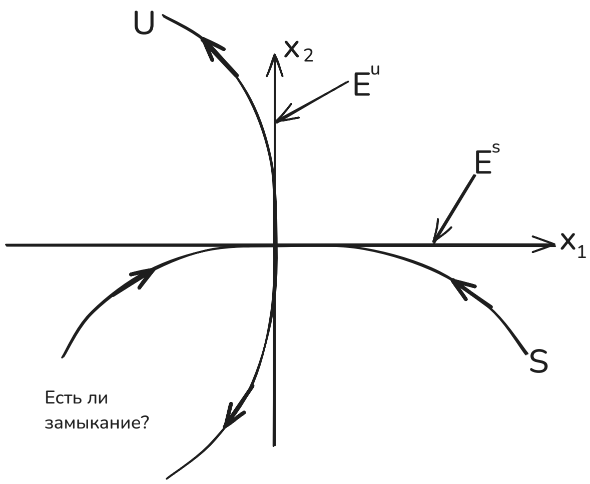
$$f(0) = 0, \quad f \in C^r(D), \quad 0 \in D \subset \mathbb{R}^n$$

Пусть матрица $A = Df(0)$ имеет k собственных значений с отрицательной действительной частью и $(n-k)$ собственных значений с положительной действительной частью. Тогда существует C^r-гладкое многообразие S размерности k, для которого начало координат является ω-предельной точкой ($\forall y \in S \to \lim_{t\to+\infty} \phi^t(y) = 0$), а устойчивое подпространство E^S линеаризованной системы является касательным пространством в этой точке. Кроме того, существует C^r-гладкое многообразие U размерности $(n-k)$, для которого начало координат является α-предельной точкой ($\forall y \in U \to \lim_{t\to-\infty} \phi^t(y) = 0$), а неустойчивое подпространство E^U линеаризованной системы является касательным пространством в этой точке.

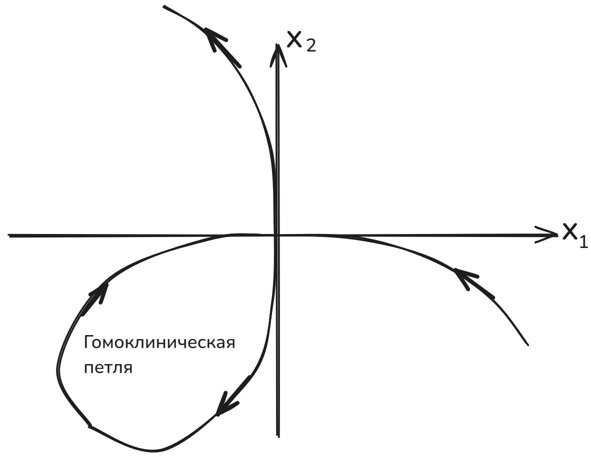
  2. Доказательство:
      1. □ основано на решении интегрального уравнения методом последовательных приближений Пикара (см. Perko, pp. 108-111) ■
2. $S, U -$ локальные инвариантные (в соответствующем направлении) многообразия (определены только в некоторой окрестности начала координат)
3. Глобальное устойчивое (неустойчивое) инвариантное многообразие начала координат:

$$W^S(0) = \bigcup_{t\le 0} \phi^t(S) \qquad (W^U(0) = \bigcup_{t\ge 0} \phi^t(S))$$

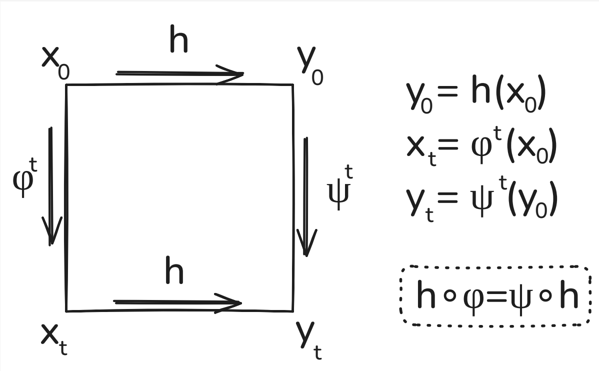
4. Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия определены однозначно. Они аналитичны, если f аналитично
5. Пример: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_1^2 \end{cases}$
    1. E^S - ось x_1
    2. E^U - ось x_2
    3. Будем искать уравнение для устойчивого многообразия S в виде $x_2 = ax_1^2 + O(x_1^3)$, а для неустойчивого многообразия U в виде $x_1 = bx_2^2 + O(x_2^3)$
    4. $2ax_1(-x_1 - a^2x_1^4 + O(x_1^5)) + O(x_1^3) = ax_1^2 + x_1^2 + O(x_1^3)$
        1. $a + 1 = -2a \ \ \to \ \ a = -1/3$
        2. $S: \ \ x_2 = -x_1^2/3 + O(x_1^3)$
    5. $2bx_2(x_2 + b^2x_2^4 + O(x_2^5)) + O(x_2^3) = -bx_2^2 - x_2 + O(x_2^3)$
        1. $-b - 1 = 2b \ \ \to \ \ b = -1/3$
        2. $U: \ \ x_1 = -x_2^2/3 + O(x_2^3)$
        3. Можно показать, что следующие слагаемые имеют даже 5-ю степень, но для нас это не принципиально



    6. $\Gamma = W^S(0) \cap W^U(0)$ - гомоклиническая петля



6. Следствие теоремы об устойчивом многообразии:
   1. Для $\forall \alpha, \beta > 0$ удовлетворяющих соотношению $Re(\lambda_j) < -\alpha < 0 << Re(\lambda_m), \quad j = 1, \ldots k, \quad m = k+1, \ldots n$
   2. Для $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что
   3. Если $x_0 \in B_\delta(0) \cap S$, то $|\phi^t(x_0)| \le \varepsilon e^{-\alpha t} \quad \forall t \ge 0$
   4. Если $x_0 \in B_\delta(0) \cap U$, то $|\phi^t(x_0)| \le \varepsilon e^{-\boldsymbol{t}} \quad \forall t \le 0$
   5. Другими словами, динамика на устойчивом и неустойчивом многообразиях экспоненциально быстрая
7. В окрестности гиперболического положения равновесия всегда существует локальный гомеоморфизм между траекториями нелинейной и линеаризованной систем, причём он сохраняет не только направление движения по траекториям, но и параметризацию временем.
8. $\begin{cases} \phi^t : M \to M \\ \boldsymbol{x} = f(x) \end{cases}$ топологически сопряжена с $\begin{cases} \phi^t : N \to N \\ \boldsymbol{y} = g(y) \end{cases}$, если $\exists$ гомеоморфизм $h : M \to N$ такой, что $h(\phi^t(x)) = \psi^t(h(x))$

9. Если гомеоморфизм сохраняет только направление движения по траекториям, но требует репараметризации, т.е. $h(\phi^\tau(x)) = \psi^t(h(x))$, где $\tau = \tau(x,t)$ – возрастающая функция $\forall x \in M$, то говорят о более слабом понятии топологической эквивалентности
10. Две непрерывные ДС называют гладко сопряжёнными, если они топологически сопряжены и h – диффеоморфизм
    1. h'_x – производная отображения h в точке x
    2. $h'_x : T_xM \to T_{h(x)}N$
    3. $g(h(x)) = h'_x f(x)$
    4. $Dh = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$ - якобиан отображения h
    5. $g(h(x)) = Dh * f(x)$
    6. $f(x) = (Dh)^{-1} * g(h(x))$
11. ? Упражнение: докажите, что линейные системы $\dot{x} = Ax$ и $\dot{y} = By$ топологически сопряжены $\iff$ матрицы A, B подобны (когда существует невырожденная матрица S такая, что $B = S^{-1}AS$)
    1. Указание: Искомое отображение имеет вид $x = Sy$. Это - диффеоморфизм, поэтому сопряжённость линейных систем (линейная сопряжённость) всегда гладкая

Теорема Гробмана-Хартмана.

1. Теорема Гробмана-Хартмана:

1. ↳ Пусть ϕ^t - поток нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$, причём

   $$f(0) = 0, \quad f \in C^1(D), \quad 0 \in D \subset \mathbb{R}^n$$

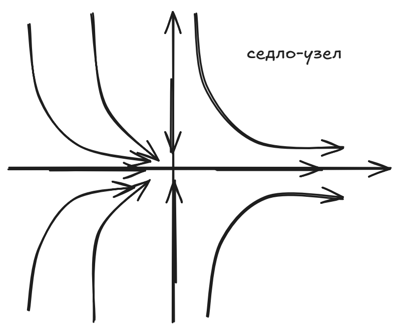
   Пусть начало координат - гиперболическое положение равновесия. (то есть $A = Df(0)$ не имеет $\lambda : Re(\lambda) = 0$). Тогда в некоторой окрестности начала координат нелинейная система топологически сопряжена линеаризованной (т.е. существует гомеоморфизм $h : U \to V$ между окрестностями начала координат такой, что ... ???)
2. Замечание: гомеоморфизм h не обязан быть гладким. Однако, как доказал Хартман, если $f \in C^2(D)$, а все собственные значения матрицы $A = Df(0)$ имеют отрицательную действительную часть (или все они имеют положительную действительную часть), то нелинейная система гладко сопряжена со своей линеаризацией в окрестности гиперболического положения равновесия в начале координат
3. По теореме Гробмана-Хартмана, в некоторой окрестности гиперболического положения равновесия нелинейная система топологически эквивалентна стандартному седлу
   1. Поскольку матрица линеаризованной системы может быть приведена к жордановой форме $B = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{bmatrix}$,
   2. А система $\dot{y} = By$ топологически эквивалентна стандартному седлу $\dot{z} = \Sigma z$, где $\Sigma = \begin{bmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & -E_k \end{bmatrix}$

2. ? Упражнение: докажите, что двумерная линейная ДС с фазовым портретом типа "устойчивый узел" топологически эквивалентна (но не сопряжена!) системе с фазовым портретом типа "устойчивый фокус"
3. В окрестности негиперболических положений равновесия существует центральное многообразие – многообразие, касательным пространством к которому в положении равновесия является центральное подпространство E^c линеаризованной системы. В отличие от устойчивого и неустойчивого многообразий, центральное многообразие в общем случае определено не однозначно и имеет пониженную степень гладкости
4. Пример:

   $$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   1. Решение:

      $$\begin{matrix} x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{matrix} \quad \to \quad y(x) = Ce^{1/x}$$

   2. Центральным многообразием является любая кривая из левой полуплоскости, а также положительный луч оси Ox

Теорема о центральном многообразии.

1. Теорема о центральном многообразии:
   1. ↳ Пусть ϕ^t - поток нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$, причём

      $$f(0) = 0, \quad f \in C^r(D), \quad 0 \in D \subset \mathbb{R}^n$$

      Пусть $A = Df(0)$ имеет c собственных значений $Re(\lambda) = 0$, s собственных значений $Re(\lambda) < 0$, и $u = (n - c - s)$ собственных значений $Re(\lambda) > 0$. Тогда $\exists$ инвариантные многообразия W^c, W^s, W^u гладкости C^{r-1}, C^r, C^r, касательными пространствами которых в начале координат являются E^c, E^s, E^u.
   2. Многообразия W^s, W^u определены однозначно, W^c - нет.
   3. Если $f \in C^\infty(D)$, можно найти C^r-гладкое центральное многообразие с $\forall r < \infty$. Динамика на центральном многообразии определяется нелинейными членами разложения f в ряд Тейлора в окрестности $x = 0$

2. (нечто после теоремы)
   6. $\forall y \in W^s \quad \lim_{t\to+\infty} \phi^t(y) = 0$
   7. $\forall y \in W^u \quad \lim_{t\to-\infty} \phi^t(y) = 0$
   8. $\forall y \in W^c \quad \phi^t(y) \in W^c \quad \forall t \in \mathbb{R}$
   9. $\dot{y} = By$, B - матрица в жордановой форме $B = \begin{bmatrix} B_+ & 0 & 0 \\ 0 & B_- & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \dot{y}_c = B_0 y_c \\ \dot{y}_s = B_- y_s \\ \dot{y}_u = B_+ y_u \end{cases}$
   10. Соответствующая замена переменных $x = Sy$
   11. Добавка из нелинейных членов разложения в ряд Тейлора:

$$\dot{x} = f(x) \quad \to \quad \begin{cases} \dot{y}_c = B_0 y_c + F(y_c, y_s, y_u) \\ \dot{y}_s = B_- y_s + G(y_c, y_s, y_u) \\ \dot{y}_u = B_+ y_u + H(y_c, y_s, y_u) \end{cases}$$

3. Теорема о редукции на центральном многообразии:
   1. ↪ В условиях Теоремы (о центральном многообразии) существуют гладкие $y_s = h_1(y_c)$ и $y_u = h_2(y_x)$, аппроксимирующие центральное многообразие в начале координат. Они удовлетворяют уравнениям

$$Dh_1(y_c)\left(B_0 y_c + F(y_c, h_1(y_c), h_2(y_c))\right) - B_- h_1(y_c) - G(y_c, h_1(y_c), h_2(y_c)) = 0,$$

$$Dh_2(y_c)\left(B_0 y_c + F(y_c, h_1(y_c), h_2(y_c))\right) - B_+ h_2(y_c) - H(y_c, h_1(y_c), h_2(y_c)) = 0,$$

   2. В окрестности начала координат система $\dot{x} = f(x)$ топологически сопряжена системе

$$\begin{cases} \dot{y}_c = B_0 y_c + F(y_c, h_1(y_c), h_2(y_c)) \\ \dot{y}_s = B_- y_s \\ \dot{y}_u = B_+ y_u \end{cases}$$

   3. Функции $h_1(y_c), h_2(y_c)$ ищутся в виде разложения в ряд Тейлора по степеням $|y_c|$, начиная с членов порядка $|y_c|^2$
   4. Если $u = 0$ или $s = 0$, анализ динамики на центральном многообразии упрозается. Кроме того, его гладкость будет в этом случае такая же, как у функции правых частей
4. Теорема о центральном многообразии (частный случай):
   1. ↪ Пусть ϕ^t - поток нелинейной системы $\dot{x} = f(x)$, причём

$$f(0) = 0, \quad f \in C^r(D), \quad \in D \subset \mathbb{R}^n$$

   Пусть $A = Df(0)$ имеет c собственных значений $Re(\lambda) = 0$, $s = n - c$ собственных значений $Re(\lambda) < 0$ (Нет неусточивого многообразия!) Тогда инвариантные многообразия гладкости касательными пространствами которых в начале координат являются
   2. Замечание: Теорема (о редукции на центральном многообразии) утверждает существование C^r-гладкой функции $y_s = h(y_c)$, аппроксимирующей центральное многообразие в начале координат и удовлетворяющей уравнению

$$Dh_1(y_c)\left(B_0 y_c + F(y_c, h_1(y_c))\right) - B_- h_1(y_c) - G(y_c, h_1(y_c)) = 0.$$

   3. В окрестности начала координат на центральном многообразии задаётся системой

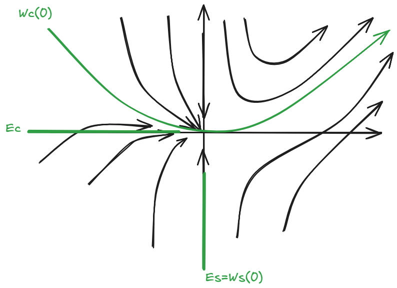
$$\dot{y}_c = B_0 y_c + F(y_c, h(y_c))$$

5. Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 x_2 - x_1^5 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \end{cases} \qquad A = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   1. $B_0 = 0, \quad B_- = -1$
   2. $y_c \equiv x_1 \quad F(y_c, y_s) = y_c^2 y_s - y_c^5$
   3. $y_s \equiv x_2 \quad G(y_c, y_s) = y_c^2$
   4. $h(y_c) = a y_c^2 + b y_c^3 + O(y_c^4)$
   5. $Dh(y_c) = 2a y_c + 3b y_c^2 + O(y_c^3)$
   6. $(2a y_c + 3b y_c^2 + \ldots)(a y_c^4 + b y_c^5 + \ldots - y_c^5) + a y_c^2 + b y_c^3 + \ldots - y_c^2 = 0$
      1. $y_c^2 : a - 1 \quad \to \quad a = 1$
      2. $y_c^3 : b \quad \to \quad b = 0$
      3. ...
      4. $y_s = y_c^2 + \ldots$ - аппроксимация центрального многообразия вблизи начала координат

5. $\dot{y}_c = y_c^4 + \dots$ - приближённое уравнение динамики на центральном многообразии
6. Седло-узел



7. Важно: динамика на центральном многообразии не может исследоваться проценированием на цетральное подпространство линеаризованной системы (подстановкой $y_s = 0$ в уравнения) - из уравнения $\dot{y}_c = -y_c^5$ сделаем неверный вывод об устойчивости положения равновесия

7. Медленное многообразие – центральное многообразие, отвечающее чисто нулевым λ
   1. Одномерное центральное многообразие – всегда медленное
   2. ? Почему?
8. Пример:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_2^2 + x_1 x_3 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

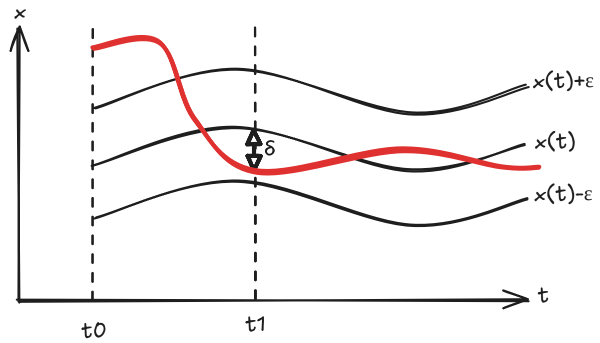
   1. $\lambda_{1,2} = 0$, собственный вектор $[1,0,0]$
   2. Присоединённый вектор $[0,1,0]$
      1. $A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$
   3. $S = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
   4. Замена $x = Sy: \quad \begin{cases}\dot{y}_1 = y_2\\ \dot{y}_2 = y_1^2 + (y_2-y_3)^2 + y_1y_3\\ \dot{y}_3 = -y_3 + (y_2-y_3)^2 + y_1y_3\end{cases} \qquad B_0 = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \quad B_- = -1$
   5. $y_c = [y_1, y_2], \quad y_s = y_3$
   6. $F(y_c, y_s) = \begin{bmatrix}0\\ y_1^2 + (y_2-y_3)^2 + y_1y_3\end{bmatrix}$
   7. $G(y_c, y_s) = (y_2-y_3)^2 + y_1y_3$
   8. $h(y_c) = ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2 + O(|y_c|^3)$
   9. $Dh(y_c) = [2ay_1 + by_2 \quad 2cy_2 + by_1]$
   10. $$2ay_1 + by_2)y_2 + (2cy_2 + by_1)\left(y_1^2 + (y_2 - h(y_1,y_2))^2 + y_1h(y_1,y_2)\right) +$$ $$+ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2 + O(|y_c|^3) - (y_2 - h(y_1,y_2))^2 - y_1(ay_1^2 + by_1y_2 + cy_2^2 + O(|y_c|^3)) = 0$$
   11. $y_1^2: a \to a = 0$
   12. $y_2^2: c - 1 \to c = 1$
   13. $y_1y_2: b \to b = 0$
   14. ...
   15. $y_3 = y_2^2 + O(|y_c|^3)$ – аппроксимация центрального многообразия вблизи начала координат
   16. $\begin{cases}\dot{y}_1 = y_2,\\ \dot{y}_2 = y_1^2 + y_2^2 + O(|y_c|^3)\end{cases}$ – приближённые уравнения динамики на центральном многообразии
   17. Касп $\to$ нулевое положение равновесия неустойчиво
9. Упростить анализ динамики на многомерных центральных многообразиях зачастую помогает переход к полярным координатам
10. Пример: $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 + x_1x_3\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2x_3\\ \dot{x}_3 = -x_3 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2\end{cases}$
    1. $B_0 = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \quad y_c = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$
    2. $B_- = -1, \quad y_s = x_3$

3. $F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1x_3 \\ x_2x_3 \end{bmatrix}$
4. $G(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$
5. $x_3 = h(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + \ldots$
6. После подстановки в дифференциальное уравнение для $h(x_1, x_2)$ и группировки подобных членов получим:
    1. $a = -1, \quad b = 0, \quad c = -1$
7. $h(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 + \ldots$
8. Приближённые уравнения динамики на центральном многообразии имеют вид $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(-x_1^2 - x_2^2 + \ldots) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(-x_1^2 - x_2^2 + \ldots) \end{cases}$
9. Для $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ имеем $\dot{r} = -r^3 + O(r^4)$
10. Устойчивый фокус - нулевое положение равновесия устойчиво

6. > Цикл — периодическое решение ДС
7. $\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(t_0) = x_0$ - решение, определённое для $\forall t \geq t_0$
8. > $\tilde{x}(t)$ устойчиво по Ляпунову, если

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_1 \geq t_0 \quad \to \quad \exists \delta(\varepsilon, t_1) > 0: \quad \forall x(t), |x(t_1) - \tilde{x}(t_1)| < \delta \quad \to \quad |x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_1$$

9. > $\tilde{x}(t)$ равномерно устойчивое по Ляпунову, если $\delta = \delta(\varepsilon)$ не зависит от t_1
    1. Траектория остаётся сколь угодно долго в ε-трубке вблизи траектории $\tilde{x}(t)$



10. > $\tilde{x}(t)$ (равномерно) асимптотически устойчиво, если оно (равномерно) устойчиво по Ляпунову и

$$|x(t) - \tilde{x}(t)| \to 0, \quad t \to +\infty$$

2. Все такие $x(t_0)$ образуют бассейн притяжения решения $\tilde{x}(t)$
3. Для автономных систем ляпуновская/асимптотическая устойчивость равномерно (т.к. всегда можно сдвинуть временную шкалу)

11. > GAS (globally asymptotically stable) — глобально асимптотические устойчивое (если бассейн притяжения - всё пространство)
12. ? Упражнение: пусть ДС имеет GAS-решение. Сколько ещё GAS-решений она может иметь?
13. ? Упражнение: пусть ДС имеет GAS-неподвижную точку. Сколько ещё GAS-неподвижных точек она может иметь
    1. Ответ: нисколько, такая точка единственна
14. > Система называется глобально асимптотически устойчивой, если она имеет глобально асимптотически устойчивое положение равновесия
2. Периодические решения крайне редко обладают свойствами ляпуновской и асимптотической устойчивости
15. Примеры
3. Гармонический осциллятор $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
1. Все траектории устойчивы по Ляпунову (период не зависит от начальных условий)
4. Математический маятник $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$
2. Периодические решения неустойчивы по Ляпунову
5. Невозмущённая задача двух тел
1. Периодические решения неустойчивы по Ляпунову
16. > $\tilde{x}(t)$ орбитально устойчиво (устойчиво по Пуанкаре), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \to \quad \exists \delta > 0: \quad \forall x(t), |x(t_0) - \tilde{x}(t_0)| < \delta \quad \to \quad \operatorname{dist}(x(t), \Gamma) < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0, \quad \Gamma = \tilde{x}(t), t \geq t_0$$

4. Устойчивость по Ляпунову: $\sup_{t \leq t_0} |x(t) - \tilde{x}(t)| < \varepsilon$

5. Устойчивость по Пуанкаре: $\sup_{t'\leq t_0}\inf_{t''\leq t_0}|x(t')-\tilde{x}(t'')|<\varepsilon$
6. Устойчивое по Ляпунову решение устойчиво по Пуанкаре
7. $\tilde{x}(t)$ асимптотически орбитально устойчиво, если оно орбитально устойчиво и

$$\operatorname{dist}(x(t),\Gamma)\to 0,\quad t\to+\infty,\quad \forall x(t):\ |x(t)-\tilde{x}(t_0)|<\delta$$

17. > $y=x-\tilde{x}(t)$ – отклонение от периодического решения
18. $\dot{y}=A(t)y,\ \ A(t)=\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=\tilde{x}(t)}$ - линеаризация относительно периодического решения системы
19. Теорема Андронова-Витта:
    1. ↳ Если для системы, линеаризованной относительно периодического решения $\tilde{x}(t)$, матрица монодромии имеет мультипликатор $\exists!\mu=1$, а остальные $|\mu|<1$, то решение $\tilde{x}(t)$ асимптотически орбитально устойчиво, причём $\lim_{t\to+\infty}x(t+\varphi)-\tilde{x}(t)|=0$, где φ - некоторое число (асимптотическая фаза). Если хотя бы 1 мультипликатор $|\mu|>1$, то решение $\tilde{x}(t)$ орбитально неустойчиво
    2. Замечание: Исследование устойчивости периодического решения нелинейной системы можно свести к вопросу устойчивости неподвижной точки некоторого отображения
20. Выберем S так, чтобы периодическая траектория пересекала её трансверсально, то есть протыкала её, а не касалась: $\nabla S(x_0)f(x_0)\neq 0$
    1. $S=\{x:S(x)=0\}$ (гиперповерхность в пространстве состояний, гладкое $(n-1)$-мерное подмногообразие; $S:M\to\mathbb{R}$ - функция, задающая поверхность; $S(x_0)=0$, т.е. $x_0\in S$)
21. Ввиду непрерывности решения по начальным условиям вблизи точки x_0 существуют точки, траектории которых снова пересекут гиперповерхность S
    1. $\tau(x)$ - время возврата
    2. $y=P(x)$ - точка возврата ($x,y\in S$)
22. > Отображение Пуанкаре: $P:S\to S$
    1. S - сечение Пуанкаре
    2. Обычно S - гиперплоскость, особенно удобно при $n=3$
23. ↳ Теорема:
    1. Если $\forall\varepsilon>0\to\exists\delta>0:\forall x\in S,|x-x_0|<\delta,|P(x)-x_0|<\varepsilon,$
    2. То $\tilde{x}(t)$ орбитально устойчиво
    3. Если при этом $P^n(x)\to x_0,\ \ n\to\infty,$
    4. То $\tilde{x}(t)$ асимптотически орбитально устойчиво
    5. Если все $n-1$ собственных значений линеаризованного в окрестности x_0 отображения Пуанкаре $x\to\frac{\partial P}{\partial x}|_{x=x_0},\ \ x\in S$ по модулю меньше 1: $|\lambda|<1$
    6. То $\tilde{x}(t)$ асимптотически орбитально устойчиво
    7. Если у линеаризованного отображения Пуанкаре хотя бы оно $\exists!|\lambda|>1,$
    8. То $\tilde{x}(t)$ орбитально неустойчиво
24. Теорема опирается на тот факт, что спектр матрицы монодромии линеаризованной в окрестности $\tilde{x}(t)$ ДС состоит из единицы и $n-1$ собственных значений линеаризованного отображения Пуанкаре
25. **?** Докажите, что в гамильтоновой ДС периодическое решение не может быть асимптотически орбитально устойчивым
26. **?** Найдите спектр матрицы монодромии дл линеаризованной относительно кеплерова эллипса невозмущённой задачи двух тел