

Линейные системы с постоянными коэффициентами

1. Положим, вектор состояния n -мерный: $x = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$. Рассматриваются линейные непрерывные динамическая система:

$$\dot{x} = Ax$$

1. $A = \text{const}$ – стационарная (автономная) система
2. $A = A(t)$ – нестационарная (неавтономная) система

2. > **Задача Коши:**
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

1. Решение задачи Коши (ряд всегда сходится!):

$$x(t) = e^{At}x_0, \quad \text{где } e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

2. Следствие: $x = 0$ – неподвижная точка

Устойчивое, неустойчивое и центральное подпространства

1.  Матричные экспоненты проще всего вычислять, приводя матрицу системы к жордановой форме:

1. Допустим, $B = S^{-1}AS$ – жорданова матрица, S – невырожденная матрица перехода

2. Тогда из $x = Sy$ получаем $\dot{y} = By$

3. Можно представить в виде $B = \begin{bmatrix} B_+ & 0 & 0 \\ 0 & B_- & 0 \\ 0 & 0 & B_0 \end{bmatrix}$, где B_i – блоки жордановых клеток, индекс показывает знак

действительных частей собственных значений для клеток блока

1. $\dot{y}_+ = B_+ y_+$ – неустойчивая подсистема

2. $\dot{y}_- = B_- y_-$ – устойчивая подсистема

3. $\dot{y}_0 = B_0 y_0$ – центральная подсистема

4. Соответствующие подпространства называются аналогично и обозначаются E^u, E^s, E^c (*unstable, stable, center*)

4. Гиперболическая система: $B_H = \begin{bmatrix} B_+ & 0 \\ 0 & B_- \end{bmatrix}$

5. Если $B = \text{diag}[\lambda_j]$, то $e^{Bt} = \text{diag}[e^{\lambda_j t}]$

6. Если $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$, то $e^{Bt} = \begin{bmatrix} 1 & t & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & t \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} e^{\lambda t}$

2. Для $M = \mathbb{R}^2$ жорданова форма $B = S^{-1}AS$ матрицы A имеет один из трёх видов:

1. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \rightarrow e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}$. Собственные значения $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = \mu$

2. $B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \rightarrow e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

3. $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \rightarrow e^{Bt} = \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix}$. Собственные значения $\lambda_{1,2} = a \pm bi$

3. > Системы, чей фазовый портрет меняется при малом изменении параметров (например, коэффициентов матрицы A), называется **критическими**

4. > Система, имеющая нулевое собственное значение, называется **вырожденной**

1. Вырожденные системы – всегда критические

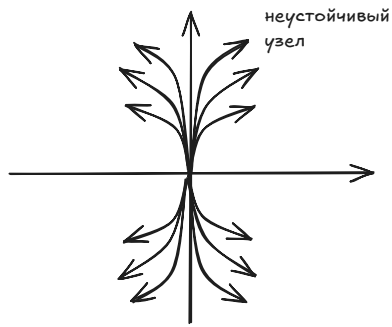
Классификация двумерных линейных систем

1.  Классификация

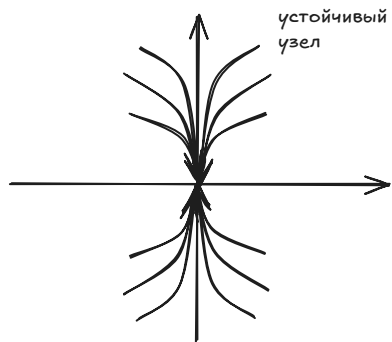
1. Невырожденные не критические системы

1. Действительные собственные значения

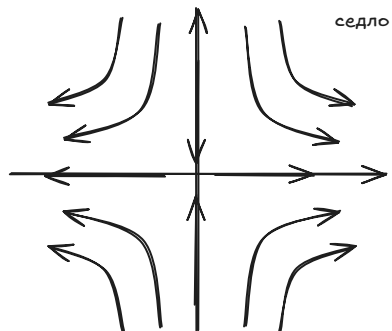
1. Неустойчивый узел $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



2. Устойчивый узел $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



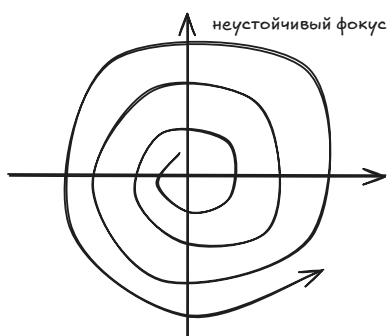
3. Седло $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$



2. Комплексные собственные значения $\lambda_1 = a + bi, \lambda_2 = a - bi$ $\left(B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \right)$

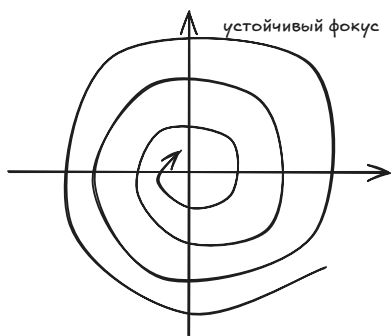
4. Неустойчивый фокус $a > 0$

2. $b > 0$:



5. Устойчивый фокус $a < 0$

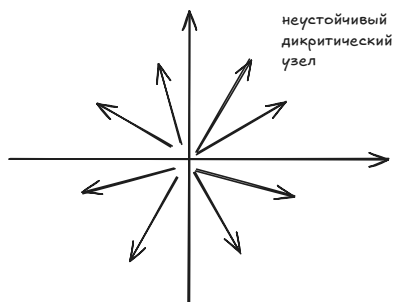
1. $b > 0$:



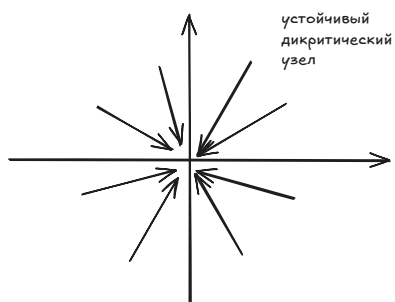
2. невырожденные критические системы

3. Действительные собственные значения

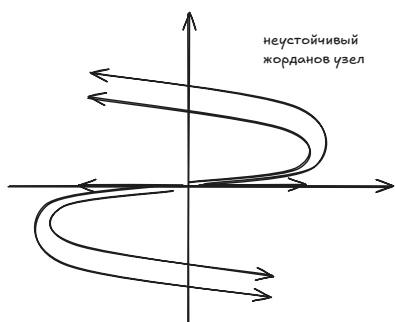
1. Неустойчивый дикритический узел $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\left(B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \right)$



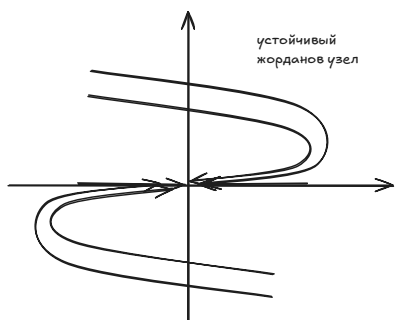
2. Устойчивый дикритический узел $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



3. Неустойчивый жорданов узел $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ $\left(B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \right)$



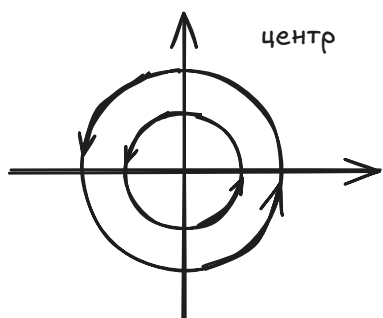
4. Устойчивый жорданов узел $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



4. Комплексные собственные значения

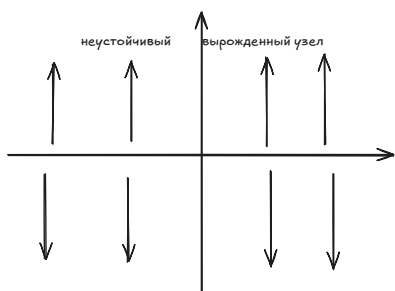
1. Центр $\lambda_1 = bi, \lambda_2 = -bi$ $\left(B = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \right)$

1. $b > 0$:

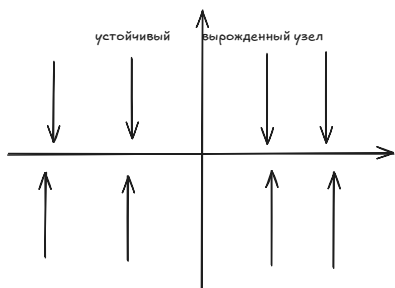


3. Вырожденные системы

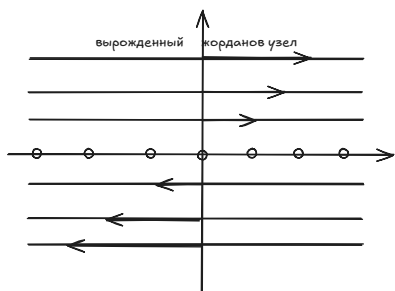
5. Неустойчивый вырожденный узел $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ $\left(B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right)$



6. Устойчивый вырожденный узел $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$



7. Вырожденный жорданов узел $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\left(B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$



8. Покой $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\left(B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

2. Пока что шла речь об однородных стационарных линейных системах. Для неоднородной системы решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

может быть записано через фундаментальную матрицу решений – невырожденную матрицу, удовлетворяющую

матричному уравнению

$$\dot{\psi}(t) = A\psi(t) \\ x(t) = \psi(t)\psi^{-1}(0) + \int_0^t \psi(t)\psi^{-1}(\tau)b(\tau)d\tau$$

Формула остаётся верной и для нестационарных ДС, когда $A = A(t)$

3. > Главную фундаментальную матрицу, удовлетворяющую соотношению $\psi(0) = E$, называют также **переходной матрицей** (англ. *state-transition matrix*, *STM*), и обозначают $\Phi(t)$.

1. Для стационарных линейных ДС, $\Phi(t) = e^{At}$, $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)d\tau$
2. Для произвольных линейных ДС, $x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)b(\tau)d\tau$, где $\Phi(t, t_0)$ – STM линейной ДС

Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теория Флоке.

1. Важный класс нестационарных линейных ДС – системы с периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x \\ A(t+T) = A(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

где $A(t)$ - кусочно-непрерывная матрица

2. $\psi(t)$ – фундаментальная матрица решений

1. Любые две фундаментальные матрицы связаны соотношением $\psi_2(t) = \psi_1(t)C$, где C - постоянная невырожденная матрица

3. **Теорема Флоке-Ляпунова:**

1. ↪ Любая STM линейной ДС с периодическими коэффициентами представима в виде

$$\psi(t) = P(t)e^{Bt},$$

где $P(t)$ – T -периодическая матрица, B – постоянная матрица

2. Доказательство:

1. $\square \tau = t + T$
2. $\psi(\tau)$ - тоже STM: $\frac{dx}{dt} = A(\tau - T)x = A(\tau)x$
3. $\psi(t+T) = \psi(t)C$
4. $\forall$ невырожденную матрицу можно представить в виде матричной экспоненты: $C = e^{BT}$.
5. Пусть $P(t) = \psi(t)e^{-Bt}$
6. Докажем периодичность: $P(t+T) = \psi(t+T)e^{-B(t+T)} = \psi(t)Ce^{-Bt}e^{-BT} = \psi(t)e^{-Bt} = P(t)$ ■

4. > **Матрица монодромии:** $C = e^{BT}$

5. > **Мультипликаторы Флоке** μ (характеристические мультипликаторы) – собственные значения матрицы монодромии

1. Существование периодических решений и устойчивого положения равновесия определяются мультипликаторами Флоке
2. Необходимое и достаточное условие существования T -периодических решений – наличие хотя бы 1 мультипликатора Флоке, равного 1

6. > **Показатель Флоке** (характеристические показатели) – $\forall$ комплексное λ такое, что $\mu = e^{\lambda T}$, где μ - мультипликатор Флоке

7. > **Ляпуновский показатель:** $\text{Re}(\lambda)$

1. Необходимое и достаточное условие *асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия* – отрицательность всех ляпуновских показателей
2. Необходимое и достаточное условие *ляпуновской устойчивости нулевого положения равновесия*: все ляпуновские показатели неположительны, причём нулевые имеют единичную кратность (все мультипликаторы Флоке $|\mu| \leq 1$, причём последние имеют единичную кратность)
3. Ляпуновские показатели и мультипликаторы Флоке определены однозначно. Показатели Флоке – нет (к мнимой части можно добавить $2\pi ki/T$, где $k \in \mathbb{Z}$). Показатели Флоке можно сделать совпадающими с собственными значениями матрицы B .

8. > **Ляпуновское преобразование:** $x = P(t)y$

1. $\dot{P}(t)y + P(t)\dot{y} = A(t)P(t)y$
2. $\dot{y} = P^{-1}(AP - \dot{P})y$ (почему P обратима?)
3. $P(t) = \psi(t)e^{-Bt}$
4. $\dot{P}(t) = \dot{\psi}(t)e^{-Bt} + \psi(t)e^{-Bt}(-B) = A(t)\psi(t)e^{Bt} + \psi(t)e^{-Bt}(-B)$

$$5. \dot{P} = AP - PB$$

$$6. \dot{y} = By - \text{стационарная система!}$$

9. > Нестационарные системы, сводимые заменой переменных к стационарному виду, называются **производимыми** $x(t) = P(t)e^{Bt}y_0$

10. Теорема:

1. ↪ Пусть μ - один из мультипликаторов Флоке, λ - соответствующий характеристический показатель: $\mu = e^{\lambda T}$. Тогда:

1. $\exists$ решение $x(t)$ такое, что $x(t+T) = \mu x(t)$
2. такое решение представимо в виде T -периодического решения $p(t)$:

$$x(t) = e^{\lambda t} p(t)$$

11. Матрицу монодромии и мультипликаторы Флоке можно найти численно, проинтегрировав на периоде уравнение для STM:

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \\ \Phi(0) = E \end{cases} \rightarrow P(0) = E$$

1. $\Phi(T) = P(T)e^{BT} = e^{BT} = C$ - матрица монодромии

12. Полезные свойства:

2. $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n = \exp(\int_0^T \text{Tr}(A(t)) dt)$
3. $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Tr}(A(t)) dt \pmod{\frac{2\pi i}{T}}$

13. Примечание: матрицы $P(t)$ и B , вообще говоря, комплекснозначные (хот матрица монодромии вещественна для вещественной A). Можно показать, что любая STM представима в виде

$$\psi(t) = Q(t)e^{Rt},$$

где $Q(t)$ и R – периодическая и постоянная вещественные матрицы. В таком случае уже $Q(t) - 2T$ -периодическая.