Лагранжева механика. Принцип Даламбера-Лагранжа. Конфигурационное многообразие системы с конечным числом степеней свободы. Обобщенные координаты. Виртуальные перемещения. Голономные и неголономные системы. Уравнения Лагранжа. Уравнения Лагранжа с множителями. Уравнения Аппеля. Уравнения Рауса для систем с циклическими координатами. Первые интегралы уравнений Лагранжа.

Рассматриваем N точек массой m_i в положении $\vec{r}_i$:

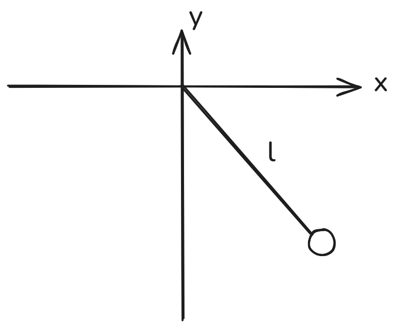
$$\vec{r} = [x_1, y_1, z_1, \dots z_N]^T \in \mathbb{R}^{3N}$$
$$\vec{F} = [F_{1x}, \dots F_{Nz}]^T \in \mathbb{R}^{3N}$$
$$M = \mathrm{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots m_N, m_N, m_N) \in \mathbb{R}^{3N\times 3N}$$

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \iff M\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Механическая связь

Ограничения на положения, скорости точек механической системы, выполненные при любом движении точек.
Удобно задавать в виде: $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0 \ \ (\leq 0, < 0, \geq 0, > 0)$

Пример: математический маятник



$$\begin{cases} f_1 = z = 0, \\ f_2 = x^2 + y^2 - l^2 = 0 \end{cases}$$

Пример: твёрдое тело с неподвижной точкой O

$f = \vec{v}_O = 0$ или $f = \dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = 0$

Классификация связей

1. Равенство/неравенство
   1. $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$ – удерживающая
   2. $f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \leq 0$ – неудерживающая
2. Зависимость от времени t
   1. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ – стационарная (склерономная)
   2. $\frac{\partial f}{\partial t} \neq 0$ – нестационарная (реономная)
3. Зависимость от скорости $\dot{\vec{r}}$
   1. $\frac{\partial f}{\partial \dot{\vec{r}}} = 0 \ \ (f = f(\vec{r}, t))$ – геометрическая

2. $\frac{\partial f}{\partial \dot{\vec{r}}} \neq 0 \ \ (f = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t))$ – дифференциальная
Замечание: любая стационарная связь может быть записана в нестационарном виде
$(x^2 + y^2 - l^2 = 0 \ \ \rightarrow \ \ (x^2 + y^2 - l^2)e^t = 0)$
Замечание: любая геометрическая связь может быть записана в дифференциальном виде
$(f(\dot{r}, t) = 0 \ \ \rightarrow \ \ \frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}, \dot{\vec{r}}\right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0)$; обратное неверно

Геометрические связи

Пусть есть k связей $f_\alpha(\vec{r}, t) = 0$, определяющие поверхность Σ

Конфигурационное многообразие

Пространство положений $\Sigma = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^{3N} : \ \ f_\alpha(\vec{r}, t) = 0, \ \ \forall \alpha = \overline{1, k}\}$
Количество степеней свободы – размерность пространства положений $n = \dim\Sigma$

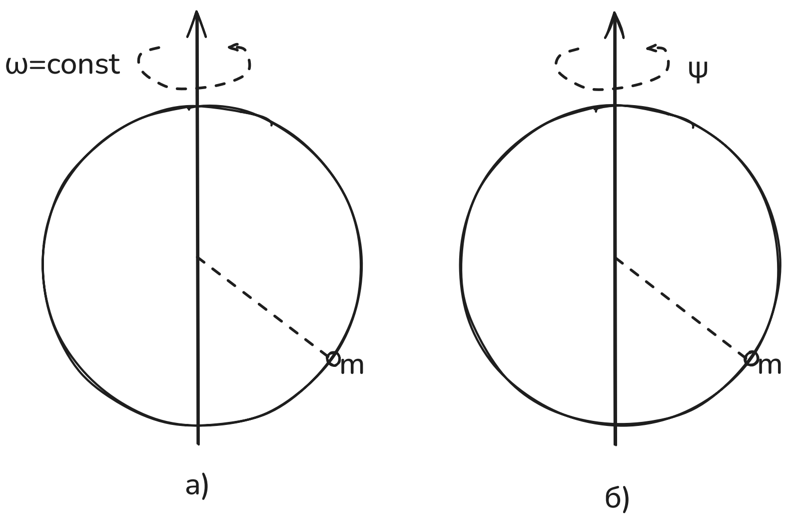
Формула

$$n = 3N - k$$

Если градиенты ур-й связи не вырождаются: $\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} \neq 0$

Если они функционально независимы: $\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_N} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial z_N} \end{bmatrix} = k$

Пример: точка на вращающейся окружности



а) постоянное вращение – 1 степень свободы
а) произвольное вращение – 2 степени свободы

Дифференциальные связи

Обобщённые координаты –

Наименьшее число параметров $\vec{q} = [q_1, \dots q_n]^T$, чтобы однозначно задать положение системы: $\vec{r} = \vec{r}(\vec{q}, t)$ (зависимость от времени потому, что $\Sigma = \Sigma(t)$)

Тогда обобщённые скорости: $\dot{\vec{q}} = [\dot{q}_1, \dots \dot{q}_n]^T$

Пусть будет 1 связь $f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = 0$. Можно ли её записать в геометрическом виде?

Голономная (интегрируемая) связь –

Дифференциальная связь, у которой уравнение может быть представлено в геометрической форме эквивалентным образом. Иначе связь неголономная (неинтегрируемая).

Пример:

$\dot{q}_1 = 0 \iff q_1 - C = 0$

Пример:

$q_2\dot{q}_1 = 0 \iff q_2(q_1 - C) = 0$ (верно из предыдущего примера, интеграл уже не берётся)

Пример:

$\dot{q}_1 = 1 \iff q_1 - Ct = 0$ (связь геометрическая но не стационарная)

Необходимое условие интегрируемости

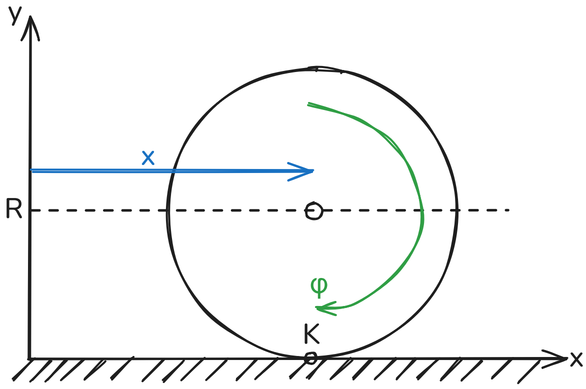
Связь $f(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) = \left(\vec{a}(\vec{q}, t), \dot{\vec{q}}\right) + b(\vec{q}, t) = 0$ голономна, если

$$\exists F(q, t) : \frac{\partial F}{\partial \vec{q}} = \vec{a}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = b,$$

т.е.

$$\Phi = \Phi^T, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial q_n} & \frac{\partial a_1}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_n}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial t} \\ \frac{\partial b}{\partial q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial b}{\partial t} \end{bmatrix}.$$

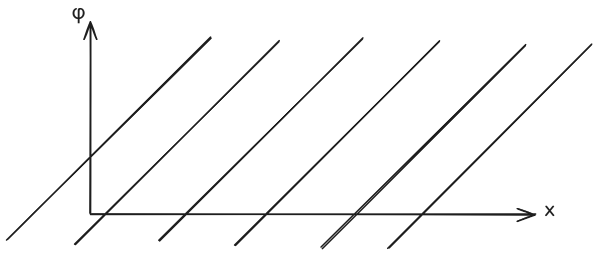
Пример: плоскопараллельное качение без проскальзывания



Кол-во степени свободы свободного плоскопараллельного движения $n=3$ (1 $-$ вращение, 2 $-$ перемещение)
Связь центра круга на прямой $y_s = R$. Тогда 2 обобщённые координаты: $\vec{q} = [x, \varphi]^T$
Условие непроскальзывания (дифференциальная связь):

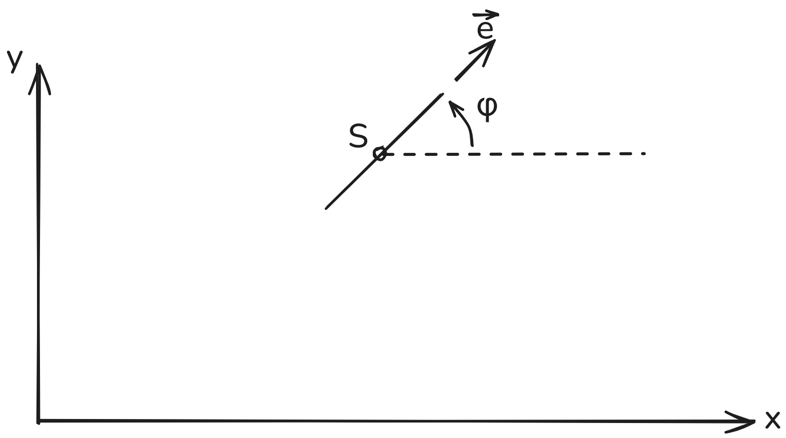
$$\vec{v}_k = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x} - R\dot{\varphi} = 0$$
$$x - R\varphi = C = \text{const}$$

Связь голономна. То есть обобщённое пространство расслаивается на параллельные траектории:



Шар на плоскости без проскальзывания $\rightarrow$ связь уже не будет интегрируемой.

Пример: Конёк Чаплыгина



Без учёта связи $n=3$ степени свободы: $\vec{q} = [x, y, \varphi]^T$
Одноногий конькобежец на льду имеет скорость параллельно вектору конька:

$$\vec{v}_S \parallel \vec{e} \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y \parallel \vec{e} = \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\varphi \vec{e}_y$$

Получается дифференциальная связь

$$\dot{y} = \operatorname{tg}(\varphi)\dot{x}$$

Такая связь не интегрируема

Доказательство (от противного)

Пусть $\exists f(x, y, \varphi, t) = 0$, которая эквивалентна

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \$\frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} + \$\frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \$\frac{\partial f}{\partial t}\dot{t} = 0$$
$$\dot{x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi)\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Заметим, что $\dot{x}, \dot{\varphi}$ независимы. Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{tg}(\varphi)\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Последнее равенство верно при любом φ, тогда оно раскладывается на $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Получается, f не зависит ни от x, ни от y, ни от φ, ни от t. Получается $f \equiv 0$. Противоречие

Доказательство (геометрическое)

В предыдущем примере после интегрирования пространство разделилось на непересекающиеся множества. Если связь интегрируется, то с одного подмножества на другое попасть не получится (нельзя из произвольного положения попасть в произвольное). Очевидно, в этой задаче таких ограничений нет.

Действительные и возможные перемещения.

По определению, $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$.

Действительные перемещения

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}.$$

Введём понятие действительного перемещения для всей системы $d\vec{r} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$.

Замечание: k уравнений связи $f_i(\vec{r}, t) = 0$ можно продифференцировать:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}, d\vec{r}\right) + \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Если принять $d\vec{r}$ неизвестным, можно найти все действительные перемещения системы.

Виртуальное перемещение

Вектор, лежащий в касательном пространстве к Σ при замороженных во времени связях:

$$\delta\vec{r} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \delta q_j.$$

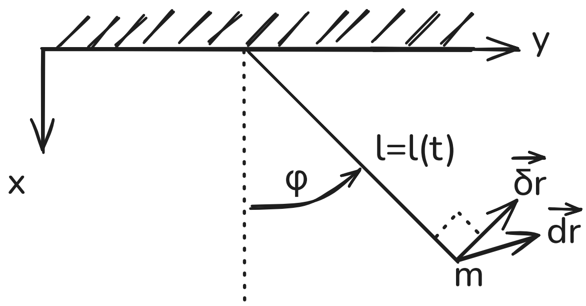
Замечание: виртуальное перемещение $\delta\vec{r}$ удовлетворяет системе

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}}, \delta\vec{r}\right) = 0, \quad i = \overline{1, k}.$$

Замечание: $dq_j = \delta q_j$, как писать — вопрос обозначения. Далее, δ — изохронный дифференциал (при фиксированном времени)

Замечание: если на систему наложены стационарные геометрические связи, то множества действительных и виртуальных перемещений совпадают

Пример: маятник переменной длины



Степень свободы одна $n = 1$, $q = \varphi$, потому что закон длины задан $l = l(t)$
Виртуальные перемещения:

$$\delta\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\delta\varphi, \quad \dot{r} = (\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)l(t)$$
$$\delta\vec{r} = \big(-\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y\big)l(t)\delta\varphi$$

Замечание: $\delta\vec{r} \perp \vec{r}$

Пример: твёрдое тело

Как связаны виртуальные перемещения у точек тела? $\vec{r}_i = \vec{r}_p + \vec{\rho}_i$, где $\vec{\rho}_i = \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_{i\alpha}\vec{e}_\alpha$, $\vec{e}_\alpha$ – СК тела, $\rho_{i\alpha} = \mathrm{const}$.
Формула Пуассона: $\dot{\vec{e}}_\alpha = [\vec{\omega}\times\vec{e}_\alpha]$
Виртуальные перемещения:

$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_p + \sum_\alpha \rho_{i\alpha}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial q_j}\delta q_j, \quad \frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial q_j} = \frac{\partial\dot{\vec{e}}_\alpha}{\partial\dot{q}_j}$$
$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_p + \sum_\alpha \rho_{i\alpha}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\dot{q}_j}\times\vec{e}_i\right]\delta q_j$$
$$\delta\vec{r}_i = \delta\vec{r}_p + \left[\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\dot{q}_j}\delta q_j \times \sum_\alpha \rho_{i\alpha}\vec{e}_i\right]$$
$$\delta\vec{r}_i = \left[\vec{\omega}_\delta\times\vec{\rho}_i\right],$$

где $\vec{\omega}_\delta$ – обозначение.

Геометрические + дифференциальные связи.

Пусть на систему наложены геометрические и дифференциальные связи:

$$\begin{cases} f_l(\vec{r},t) = 0, & l = \overline{1,\beta}, \\ \big(\vec{g}_m(\vec{r},t),\dot{\vec{r}}\big) + h_m(\vec{r},t) = 0, & m = \overline{\beta+1,k}. \end{cases}$$

Запишем их вместе в дифференциальной форме:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f_l}{\partial\vec{r}},\dot{\vec{r}}\right) + \frac{\partial f_l}{\partial t} = 0, \\ \big(\vec{g}_m(\vec{r},t),\dot{\vec{r}}\big) + h_m(\vec{r},t) = 0, \end{cases} \iff \Phi\dot{\vec{r}} + \vec{\psi} = 0, \quad \Phi = \Phi(\vec{r},t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_\beta}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\beta}{\partial z_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial z_n} \end{bmatrix}, \quad \vec{\psi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t} \\ \dots \\ h_k \end{bmatrix}.$$

Виртуальные перемещения – вектор $\delta\vec{r}$, удовлетворяющий равенству

$$\boxed{\Phi\delta\vec{r} = 0.}$$

Сила реакции связи

$$\vec{R}_i, \;\; i = \overline{1, N} \quad \left(\vec{R} \in \mathbb{R}^{3N}\right)$$

Замечание: связи - взаимодействие с телами. Были введены разные силы – те, которые продолжают действие без связей (активные: сила тяжести, сила упругости), и те, которые напрямую зависят от связей (силы реакции связи)

Идеальная связь

Связи, наложенные на систему, у которых сумма работ сил на любых виртуальных перемещениях точек системы равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\vec{R}_i, \delta\vec{r}_i\right) = 0 \quad \left(\left(\vec{R}, \delta\vec{r}\right) = 0\right)$$

Принцип Даламбера-Лагранжа (общее уравнение динамики):

Функции $\vec{r}_i(t), \;\; i = \overline{1, N}$ являются действительным движением системы с идеальными связями $\iff$ для $\forall$ виртуальных перемещений $\delta\vec{r}$ выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{N} \left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \delta\vec{r}_i\right) = 0$$

Доказательство

Переформулируем для не каждой точки: $\dot{r}(t)$ – движение $\iff$ $\left(M\ddot{\vec{r}} - \vec{F}, \delta\vec{r}\right) = 0 \quad \forall\delta\vec{r}$

$\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $\vec{r}(t)$ – движение системы. Значит, выполняется закон Ньютона $M\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{R}$, где $\vec{R}$ – силы реакции связей: $(\vec{R}, \delta\vec{r}) = 0$. Очевидно, отсюда вытекает $\left(M\ddot{\vec{r}} - \vec{F}, \delta\vec{r}\right) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ Нельзя просто из закона Ньютона "ввести" вектор $\vec{R}$ – тогда он будет зависеть от ускорений $\ddot{\vec{r}}$. Это противоречит принципу детерминированности.
Из определения виртуального перемещения: $\Phi\delta\vec{r} = 0 \quad \iff \quad \delta\vec{r} \perp \vec{\varphi}_k$, где

$$\vec{\varphi}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial\vec{r}}, \quad \vec{\varphi}_m = \frac{\partial f_m}{\partial\vec{r}}, \quad \vec{\varphi}_{m+1} = \vec{g}_{m+1}, \quad \vec{\varphi}_k = \vec{g}_k$$

Значит, $\delta\vec{r}$ ортогонален линейной оболочке из функций $\{C_1\vec{\varphi}_1 + \ldots + C_k\vec{\varphi}_k, \;\; C_1, \ldots C_k = \text{const}\}$
Теперь посмотрим на равенство $\left(M\ddot{\vec{r}} - \vec{F}, \delta\vec{r}\right) = 0$ – оно означает, что вектор $M\ddot{\vec{r}} - \vec{F}$ лежит в пространстве линейной оболочки:

$$M\ddot{\vec{r}} - \vec{F} = \lambda_1\vec{\varphi}_1 + \ldots + \lambda_k\vec{\varphi}_k = \Phi^T\vec{\lambda}.$$

Отсюда $\ddot{\vec{r}} = M^{-1}\vec{F} + M^{-1}\Phi^T\vec{\lambda}$. Матрица M постоянна и невырождена $M = \text{const}, \;\; \Delta M \neq 0$.
Далее, $\Phi = \Phi(\vec{r}, t)$, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Если $\vec{\lambda}$ не зависит от ускорений, то $\ddot{\vec{r}}$ – функция от $\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t$.
Если продифференцировать равенство $\Phi\dot{\vec{r}} + \vec{\psi} = 0$, получим $\Phi\ddot{\vec{r}} + \sigma(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0$. Подставим его

в полученную выше формулу:

$$\Phi M^{-1}\vec{F}+\Phi M^{-1}\Phi^T\vec{\lambda}+\sigma(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)=0\ \ \rightarrow\ \ \vec{\lambda}=\left(\Phi M^{-1}\Phi^T\right)^{-1}\left(\vec{\sigma}-\Phi M^{-1}\vec{F}\right)=\lambda(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)\ \ \rightarrow\ \ \ddot{\vec{r}}=$$

Здесь матрица $\Phi M^{-1}\Phi^T$ невырождена, потому что квадратичная форма преобразуется в невырожденную квадратичную форму:

$$\left(\Phi M^{-1}\Phi^T\vec{u},\vec{u}\right)=\left(M^{-1}\Phi^T\vec{u},\Phi^T\vec{u}\right)=\left(M^{-1}\vec{y},\vec{y}\right)$$
$$\left(M^{-1}\vec{y},\vec{y}\right)\neq 0\quad \text{т.к.}\quad \Delta M^{-1}\neq 0,\quad \vec{y}=\Phi^T\vec{u}=0\iff \vec{u}=0$$
$$\mathrm{rk}\Phi=k\ \ -\ \ \textit{условие независимости связей}$$

Теперь, подходящий вектор $\vec{R}$ просто вводится.

Динамика голономных систем.

Голономная система – все связи голономные (геометрические).
Работа активных сил на виртуальном перемещении:

$$\delta A=\sum_{i=1}^N\left(\vec{F}_i,\delta\vec{r}_i\right)=\left(\vec{F},\delta\vec{r}\right)=\left(\vec{F},\sum_k\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\delta q_k\right)=\sum_k\left(\vec{F},\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\right)\delta q_k$$
$$\delta A=\sum_k Q_k\delta q_k=\left(\vec{Q},\delta\vec{q}\right)$$

Обобщённая сила

Сила Q_k, соответствующая координате q_k :

$$Q_k=\sum_{i=1}^N\left(\vec{F}_i,\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_k}\right)$$

Пример: движение свободной материальной точки в ортогональных криволинейных координатах

Положение точки: $\vec{r}=\vec{r}(q_1,q_2,q_3)$
Виртуальное перемещение: $\delta\vec{r}=\sum_k\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}\delta q_k=\sum_k H_k\vec{e}_k\delta q_k$
Сила, действующая на точку: $\sum_k F_k\vec{e}_k$
Работа сил: $\delta A=\left(\vec{F},\delta\vec{r}\right)=\sum_k F_kH_k\delta q_k$
Тогда, обобщённые силы:

$$Q_k=F_kH_k$$

Пример: твёрдое тело с неподвижной точкой

Твёрдое тело: $\delta\vec{r}_i=\delta\vec{r}_p+[\vec{\omega}_\delta,\vec{\rho}_i]$ ($\vec{\omega}_\delta$ – виртуальный поворот)
Работа сил:
$\delta A=\sum_i\left(\vec{F}_i,\delta\vec{r}_i\right)=\sum_i\left(\vec{F}_i,\delta\vec{r}_p+[\vec{\omega}_\delta,\vec{\rho}_i]\right)=\left(\sum_i\vec{F}_i,\delta\vec{r}_p\right)+\left(\vec{\omega}_\delta,\sum_i[\vec{\rho}_i,\vec{F}_i]\right)=\left(\vec{F},\delta\vec{r}_p\right)+\left(\vec{\omega}_\delta,\vec{M}_p\right)$
Для внутренних сил, главный вектор $\vec{F}$ и главный момент сил $\vec{M}$ равняются нулю. Тогда внутренние связи в теле – идеальные
Пусть полюс неподвижен, тогда $\delta\vec{r}_p\equiv 0$. Тогда $\delta A=\left(\vec{\omega}_p,\vec{M}_p\right)$
Степеней свободы $n=3$, $\vec{q}=[\varphi,\psi,\theta]^T$, $\omega=\dot{\varphi}\vec{e}_\zeta+\dot{\psi}\vec{e}_z+\dot{\theta}\vec{e}_x$
$\vec{\omega}_\delta=\sum\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\ \ \rightarrow\ \ \vec{\omega}_\delta=\delta\varphi\vec{e}_\zeta+\delta\psi\vec{e}_z+\delta\theta\vec{e}_x$

Тогда работа $\delta A = \left(\vec{M}_p, \vec{e}_\zeta\right)\delta\varphi + \left(\vec{M}_p, \vec{e}_z\right)\delta\psi + \left(\vec{M}_p, \vec{e}_x\right)\delta\theta,$

$$Q_\varphi = \left(\vec{M}_p, \vec{e}_\zeta\right), \quad Q_\psi = \left(\vec{M}_p, \vec{e}_z\right), \quad Q_\theta = \left(\vec{M}_p, \vec{e}_x\right)$$

Утверждение

Если обобщённая координата q_1 – декартова координата центра масс системы x_s, то соответствующая ей обобщённая сила Q_1 есть проекция главного вектора внешних сил системы на соответствующую декартову ось

$$Q_1 = \left(\vec{F}, \vec{e}_x\right).$$

Доказательство

Чтобы посчитать обобщённую силу, надо посчитать работу, найти коэффициент при δq_1. Другие координаты мы варьировать не будем
$\delta\vec{r}_i^* = \delta q_1 \vec{e}_x, \quad \delta A^* = (\vec{F}, \delta q_1 \vec{e}_x) = (\vec{F}, \vec{e}_x)\delta q_1$

Утверждение

Если обобщённая координата q_1 – угол поворота φ всей системы как единого целого вокруг неподвижной оси $\vec{e}_z$, то соответствующая обобщённая сила – главный момент внешних сил относительно этой оси

$$Q_1 = \left(\vec{M}_p, \vec{e}_z\right)$$

Утверждение

Если активные силы $\vec{F}_i$, действующие на систему, потенциальны, то вектор обобщённых сил – градиент потенциальной
энергии

$$\vec{Q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}}$$

Доказательство

Из привычной потенциальности следует обобщённая. Определение потенциальных сил:
$\exists \Pi = \Pi(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N, t): \ \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i} = -\vec{F}_i$
Радиус-вектор точек $\vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t)$, тогда $\Pi = \Pi\left(\vec{r}_1(\vec{q}, t), \ldots \vec{r}_N(\vec{q}, t), t\right)$
Работа сил:
$\delta A = \sum_i \left(\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i\right) = -\sum_i^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i}, \sum_k^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) = -\sum_i^N \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i}, \sum_k^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = -\sum_k^n \left(\sum_i^N \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{r}_i}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k =$

Уравнения Лагранжа (второго рода)

Лагранжиан системы / функция Лагранжа

$L = T - \Pi$

Лагранжева система

Система, у которой связи голономны и идеальны, а силы потенциальны

Обобщённо-потенциальная сила

Обобщённые силы $\vec{Q}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$ называются обобщённо-потенциальными, если $\exists V(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t): \quad \vec{Q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial V}{\partial \vec{q}}$

Тогда V — обобщённо-потенциальная энергия

Теорема

Если связи, наложенные на механическую систему, голономны и идеальны, то уравнения движения системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = \overline{1, n} \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}\right)$$

Доказательство

Если связи идеальные, любое движение удовлетворяет равенству $\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \delta\vec{r}_i\right) = 0$

Выразим через обобщённые координаты: $\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\delta q_k\right) = 0$

$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right)\delta q_k = 0$

Поскольку связи голономны, $\delta q_1, \dots \delta q_n$ — независимы $\to \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = 0 \quad \forall k = \overline{1, n}$

$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = Q_k$

$\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\ddot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i, \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\right) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i, \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\vec{r}}_i\right.$

Следствие

Если наложенные на систему связи голономны и идеальны, а действующие на систему силы потенциальны, то уравнения движения системы могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = \overline{1, n} \quad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0\right)$$

Доказательство

$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \vec{Q} = -\frac{\partial \Pi(\vec{q}, t)}{\partial \vec{q}}, \quad \frac{\partial \Pi(\vec{q}, t)}{\partial \dot{\vec{q}}} = 0$

Следствие

Если связи голономны и идеальны, то можно записать уравнения движения в виде

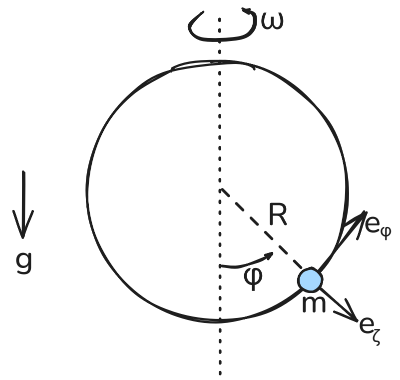
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}^*,$$

где $\vec{Q}^*$ – обобщённые силы, соответствующие непотенциальным силам, действующим на систему.

Следствие

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0, \quad \text{где} \;\; L = T - \Pi - V$$

Пример: точка на постоянно вращающейся окружности



1 степень свободы, внешняя сила – только сила тяжести
Связь идеальные, голономные
$L = T - \Pi$
$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\omega^2\sin^2\varphi\right), \quad \Pi = -mgR\cos\varphi$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = mR^2\ddot{\varphi} - mR^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + mgR\sin\varphi = 0$$

Замечание: можно перейти в подвижную СО, добавить силы инерции. Переносные силы всегда потенциальны, а кориолисовые не всегда потенциальны. Получилось бы то же самое

Замечание: сила Кориолиса направлена "от нас" и не совершает работу, соответствующая обобщённая сила нулевая

Замечание: пусть теперь есть вязкое трение $\vec{F}_{mp} = -\beta\vec{v} = -\beta\left(R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + R\omega\sin\varphi\vec{e}_\zeta\right), \quad \delta\vec{r} = R\delta\varphi\vec{e}_\varphi$

> $$\delta A = \left(\vec{F}_{mp}, \delta\vec{r}\right) = -\beta R^2\dot{\varphi}\delta\varphi \;\; \rightarrow \;\; Q_\varphi^* = -\beta R^2\dot{\varphi}$$
>
> Потенциальность уже нарушена
> $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = mR^2\ddot{\varphi} - mR^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + mgR\sin\varphi = -\beta R^2\dot{\varphi}$

Структура кинетической энергии.

$$\begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i(\vec{q}, t) \\ \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \end{cases} \rightarrow \;\; T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\vec{v}_i, \vec{v}_i\right) = T_2 + T_1 + T_0$$

T_2 – квадратичная форма по обобщённым скоростям
T_1 – линейная форма по обобщённым скоростям
T_0 – слагаемое, не содержащее обобщённых скоростей

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k,m=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m = \frac{1}{2} \left(A(\vec{q}) \dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}} \right), \quad A = \{a_{km}\}, \ \ a_{km} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_m} \right) = a_{mk}$$

$$T_1 = \sum_k \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \dot{q}_k = \left(\vec{b}, \dot{\vec{q}} \right), \quad \vec{b} = \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

Замечание: если связи стационарны, то конфигурационное пространство не зависит от времени $r_i = \vec{r}_i(\vec{q})$. Тогда $T_1 = T_0 = 0$. Обратное неверно.

Стационарно заданная система

Система, для которой $T = T_2$

Утверждение

Матрица A положительно определена

$$\Delta A \neq 0, \quad (A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \ \ \forall \vec{x} \neq 0$$

Доказательство

$$\left(A\delta\vec{q}, \delta\vec{q} \right) = \sum a_{km} \delta q_k \delta q_m = \ldots = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \left(\delta\vec{r}_i, \delta\vec{r}_i \right)$$

Следствие: разрешимость уравнений Лагранжа относительно старших производных

Уравнения Лагранжа можно представить в виде $\ddot{\vec{q}} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$

Следствие: уравнения Лагранжа с N степенями свободы можно представить как систему $2N$ уравнений, записанных в форме Коши

Уравнения Лагранжа можно представить в виде $\begin{cases} \dot{\vec{q}} = \vec{p} \\ \dot{\vec{p}} = F(\vec{q}, \vec{p}, t) \end{cases}$

Свойства уравнений Лагранжа

1. **Разрешимость относительно старших производных**
   Уравнения представляются в виде $\ddot{\vec{q}} = \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$
2. **Ковариантность к замене координат**
   Пусть есть обобщённые координаты $\vec{q}$, силы $\vec{Q}$. Тогда справедливо $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} = \vec{Q}$
   Перейдём к координатам $\vec{q} \to \vec{q}\,'$, где $\vec{q}\,' = \vec{g}(\vec{q}, t), \ \ \Delta \left[\frac{\partial \vec{q}\,'}{\partial \vec{q}} \right] \neq 0$
   Координатам $\vec{q}\,'$ соответствуют силы $\vec{Q}$ и уравнение $\frac{d}{dt} \frac{\partial T'}{\partial \dot{\vec{q}}\,'} - \frac{\partial T'}{\partial \vec{q}\,'} = \vec{Q}\,'$

Получается, при простой замене переменных, в лагранжиане надо заменить одни переменные на другие

3. **Калибровочная инвариантность**

Теорема

Уравнения Лагранжа инвариантны относительно замены

$$T' = T + \dot{f}(\vec{q}, t) \quad \Big(L' = L + \dot{f}(\vec{q}, t)\Big),$$

где $\dot{f}(\vec{q}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t}$ – полная производная функции от обобщённых координат и времени.

Доказательство

$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}(\vec{q},t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}$

$\frac{\partial \dot{f}}{\partial q_i} = \ldots = \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{f}(\vec{q},t)}{\partial \dot{q}_i}$

Следствие

Уравнения Лагранжа инвариантны относительно преобразований

$$T' = c_1 T + \dot{f}(\vec{q}, t) + c_2 \quad \Big(L' = c_1 L + \dot{f}(\vec{q}, t) + c_2\Big), \quad (c_1 \neq 0)$$

Первые интегралы лагранжевых систем: циклический интеграл

Уравнения движения таких систем $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0$

Циклическая координата

Обобщённая координата лагранжевой системы q_1, от которой не зависит лагранжиан $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$

Нециклическая координата – позиционная.

Теорема

Если лагранжева система имеет циклическую координату q_1, то соответствующие уравнения лагранжа допускают интеграл вида

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = c = \text{const}$$

Доказательство

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad \to \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$

Пусть q_1 — единственная циклическая координата. Тогда $\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = c$, где $L = L(\dot q_1, \vec{q}^* \dot{\vec{q}}^*, t)$, $\vec{q}^* = [q_2, \dots q_n]$
Можно выразить $\dot q_1 = f(\vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*, t, c)$

Функция Рауса

$R = L - c\dot q_1 = L - cf(\vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*, t, c)$

Теорема

На фиксированном уровне циклического интеграла c уравнениями движения системы (относительно позиционных координат $\vec{q}^*$) имеют вид уравнения Лагранжа с равным функции Раусса лагранжианом:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\vec{q}}^*} - \frac{\partial R}{\partial \vec{q}^*} = 0$$

Таких уравнений на 1 меньше чем исходных.

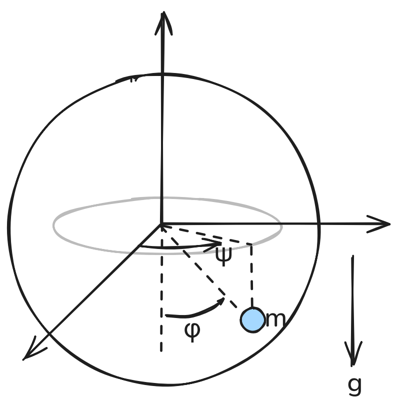
Доказательство

Из определения, $R = R(\vec{q}^*, \dot{\vec{q}}^*, t, c)$. Тогда $dR = \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\vec{q}}^*}, d\dot{\vec{q}}^*\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial \vec{q}^*}, d\vec{q}^*\right) + \frac{\partial R}{\partial t}dt + \frac{\partial R}{\partial c}dc$
С другой стороны, $dR = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^*}, d\dot{\vec{q}}^*\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}^*}, d\vec{q}^*\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot q_1}d\dot q_1 + \frac{\partial L}{\partial t}dt - cd\dot q_1 - \dot q_1 dc$
Итого, $\frac{\partial R}{\partial \dot{\vec{q}}^*} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}^*}$, $\frac{\partial R}{\partial \vec{q}^*} = \frac{\partial L}{\partial \vec{q}^*}$, $\frac{\partial R}{\partial t}dt = \frac{\partial L}{\partial t}dt$, $\frac{\partial R}{\partial c}dc = -\dot q_1$
Осталось подставить в уравнения Лагранжа.

Уравнения Раусса

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\vec{q}}^*} - \frac{\partial R}{\partial \vec{q}^*} = 0 \\ \dot q_1 = -\frac{\partial R}{\partial c} \\ \dot c = 0 \end{cases}$$

Пример: сферический маятник



Степеней свободы 2: $\vec{q} = [\varphi, \psi]$
Силы голономные, идеальные

Лагранжиан: $L = T - \Pi = \frac{mv^2}{2} - mgz = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2\sin^2\varphi\right) + mgR\cos\varphi$

Можно выписать 2 уравнения Лагранжа. Но уравнения нелинейные, как решать – неизвестно. Заметим, что ψ – циклическая координата.

Первый интеграл: $c = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mR^2\dot{\psi}\sin^2\varphi = \text{const}$. Тогда $\dot{\psi} = \frac{c}{mR^2\sin^2\varphi}$

Функция Рауса: $R = \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{c^2}{2mR^2\sin^2\varphi} + mgR\cos\varphi$

Уравнения Рауса:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\vec{q}}^*} - \frac{\partial R}{\partial \vec{q}^*} = mR^2\ddot{\varphi} + mgT\sin\varphi - \frac{c^2\cos\varphi}{mR^2\sin^3\varphi} = 0$$

Получили 1 уравнение от φ. Движение разделилось на движение плоскости (φ) и движение внутри плоскости ($\psi(\varphi)$)

Первые интегралы лагранжевых систем: интеграл Пенлеве-Якоби

Теорема об обобщённой энергии

Если лагранжиан лагранжевой системы не зависит явно от времени $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, то соответствующие уравнения Лагранжа допускают интеграл вида

$$E = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}, \dot{\vec{q}}\right) - L = \text{const} = h$$

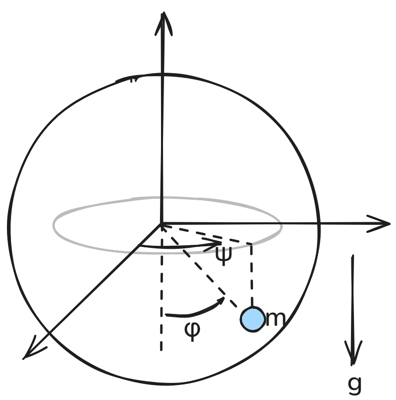
Доказательство

Посчитаем полную производную: $\frac{dE}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}, \dot{\vec{q}}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}, \ddot{\vec{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}, \dot{\vec{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}, \ddot{\vec{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial t} = \ldots = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

Замечание: $E = L_2 - L_0 = T_2 - T_0 + \Pi$ – обобщённая энергия

Замечание: в случае 1 степени свободы и наличии интеграла энергии или обобщённого энергии – уравнения движения системы интегрируются в квадратурах

Пример: сферический маятник (продолжение)



$\frac{\partial R}{\partial t} = 0 \quad \to E = \text{const} = R_2 - R_0 = \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \left(-\frac{c^2}{2mR^2\sin^2\varphi} + mgR\cos\varphi\right)$

Получается уравнение с разделяющимися переменными: $\dot{\varphi} = f(\varphi)$

Теорема (закон сохранения энергии)

Если система стационарно задана (связи стационарны, идеальны и голономны), активные силы потенциальны, и потенциальная энергия не зависит от времени, то

$$T + \Pi = \text{const} = h$$

Доказательство

Связи идеальны, голономны $\to$ система лагранжева. Связи стационарны $\to$ $T = T_2 = \frac{1}{2}\Big(A(\vec{q})\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big)$, $A = A^T$, A положительно определённая. Далее, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, а значит $E = T + \Pi \;\to\; E = \text{const}$

Натуральная (консервативная) система

Система, у которой связи идеальны, голономны, стационарны, активные силы потенциальны, и потенциальная энергия не зависит от времени.

Гироскопические силы $\vec{Q}^*$

$$\Big(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}\Big) = 0 \quad \forall \dot{\vec{q}} \in \mathbb{R}^n$$

Диссипативные силы $\vec{Q}^*$

$$\Big(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}\Big) \le 0 \quad \forall \dot{\vec{q}} \in \mathbb{R}^n$$

Гироскопические силы – не частный случай диссипативных. Здесь $\exists \dot{\vec{q}}_i : \;\Big(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}_i\Big) \neq 0$

Силы $\vec{Q}^*$ обладают полной диссипацией

$$\Big(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}\Big) < 0 \quad \forall \dot{\vec{q}} \neq 0$$

Замечание: $\Big(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}\Big) = \ldots = \sum_k \Big(\vec{F}_k, \vec{v}_k\Big)$

Пример

Пусть $\vec{Q}^* = G(\vec{q}, t)\dot{\vec{q}}$, где G – некая кососимметричная матрица $G^T = -G$. Такая сила гироскопическая, так как $\Big(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}\Big) = \Big(G\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big) = \frac{1}{2}\bigg(\Big(G\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big) + \Big((\vec{q}, t)\dot{\vec{q}}, G^T\dot{\vec{q}}\Big)\bigg) = \Big(\dot{\vec{q}}, \frac{1}{2}(G + G^T)\dot{\vec{q}}\Big) = 0$

Диссипативная функция Релея

$$\Phi = \frac{1}{2}\Big(D\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\Big)$$

Пример

Пусть $\vec{Q}^* = -D(\vec{q}, t)\dot{\vec{q}}$, где D – некая симметричная положительно определённая матрица $D^T = D$.
Такая сила с полной диссипацией, так как $\left(\vec{Q}^*, \dot{\vec{q}}\right) = \left(-D\dot{\vec{q}}, \dot{\vec{q}}\right) < 0 \quad \forall \dot{\vec{q}} \neq 0$ (из определения положительной определённости)
Уравнения движения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\vec{q}}}$$

Замечание: любую матрицу можно разбить на симметрическую и кососимметрическую. Тогда если $\vec{Q} = C\dot{\vec{q}}$, то

$$\vec{Q} = G\dot{\vec{q}} + D\dot{\vec{q}}, \quad C = \frac{C - C^T}{2}, \quad D = \frac{D + D^T}{2}.$$