Колебания нелинейных систем

Элементы теории бифуркации

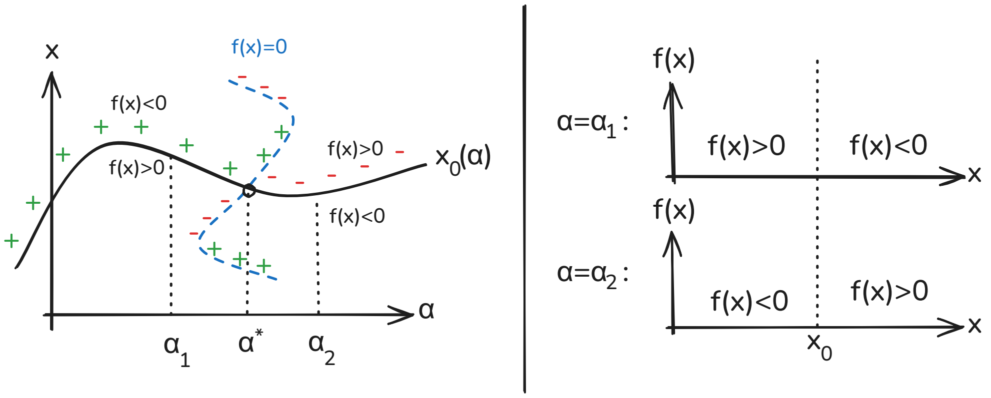
Рассмотрим автономную систему 1-го порядка с 1 параметром: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}$

> **Определение**
>
> Кривые равновесия – такие положения системы $\vec{x}_0 = \vec{x}_0(\alpha)$, при которых наступает равновесие $\vec{f}(\vec{x}_0(\alpha), \alpha) = 0$.

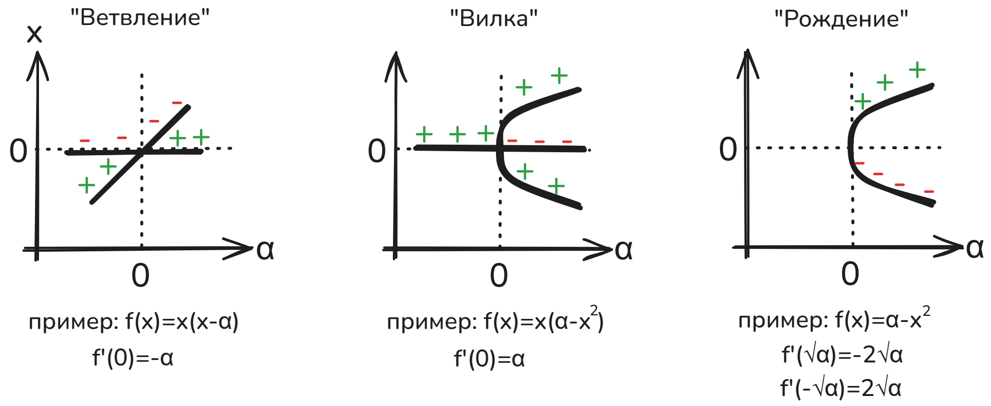
На кривых равновесия можно выделить точки бифуркации.

> **Определение**
>
> Точка бифуркации:
>
> $$\vec{x}_0(\alpha): \quad \det\left(\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}\right)\bigg|_{\alpha=\alpha^*, \vec{x}=\vec{x}_0(\alpha^*)} = 0.$$

Замечание: в частности для лагранжевых натуральных систем $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \vec{q}} = 0, \quad L = T_2 = \Pi(\vec{q}, \alpha)$ равновесие есть $\vec{q}_0 = \vec{q}_0(\alpha)$ есть критические точки потенциальной системы $\left.\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{q}}\right|_{\vec{q}=\vec{q}_0(\alpha)} = 0$, а точки бифуркации $\vec{q}_0(\alpha^*)$ удовлетворяют соотношению $\det\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{q}^2}\right)\Big|_{\alpha=\alpha^*, \vec{x}=\vec{x}_0(\alpha^*)} = 0$.

> **Пример**
>
> Одномерный случай $\vec{x} = x \in \mathbb{R}$
> Пусть в системе $\dot{x} = f(x, \alpha)$ равновесие в точке x_0. Сделаем замену координаты $x = x_0 + \tilde{x}$ для положения равновесия в $\tilde{x} = 0$.
> Линеаризуем правую часть: $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}, \alpha) = \tilde{f}'_{\tilde{x}}\tilde{x} + O(\tilde{x}^2)$.
> Для устойчивости положения равновесия требуется $f'_{\tilde{x}} < 0$, для неустойчивости – $f'_{\tilde{x}} > 0$. При $f'_{\tilde{x}} = 0$ имеет место критический случай – *точка бифуркации*.
> Пусть при $\alpha < \alpha^*$ справедливо $f'_x(x_0) < 0$, а при $\alpha > \alpha^*$ – $f'_x(x_0) > 0$. Тогда x_0 – точка смены устойчивости. Покажем, что от неё всегда ответвляется ещё одна кривая равновесия. Рассмотрим диаграмму (x, α). Поскольку сверху от кривой равновесия (для которой справедливо $f(x, \alpha) = 0$) и снизу функция f меняет знак, где-то проходит ещё кривая $f(x, \alpha) =$ – тоже кривая равновесия, причём пересекает точку бифуркации α^*. Устойчивость решения на определённых участках новой кривой равновесия зависит от наклона кривой.
>
> 
>
>
> Та же диаграмма получится при рассмотрении лагранжевых систем, но вместо знака $f(x, \alpha)$ рассматривается знак Π'_q.

Для простоты считаем $\vec{x}_0(\alpha^*) = 0, \quad \alpha^* = 0$. Тогда для одномерной системы существует 3 вида бифуркационных диаграмм:



Теперь рассмотрим $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$.

Пример

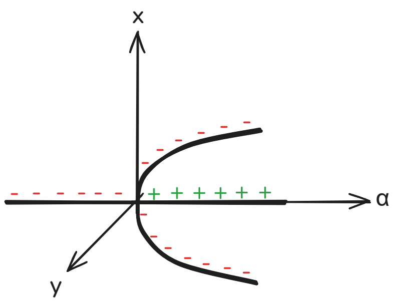
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\alpha x - y + x^3 \end{cases}.$$

Положения равновесия $\dot{x} = \dot{y} = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ y = 0, \quad x = \pm\sqrt{\alpha} \end{array}\right.$ Кривые равновесия образуют бифуркационную диаграмму типа "вилка".
Исследуем устойчивость каждого решения.
Рассмотрим решение $x = y = 0$:

> Линеаризуем систему: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -\alpha & -\lambda - 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda + \alpha = 0.$
> Уравнение квадратное, положительность всех коэф-в $-$ необходимое и достаточное условие для $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$.
> Устойчиво при $\alpha > 0$, неустойчиво при $\alpha < 0$.
> Проверить $\alpha = 0$ можно с помощью функции Ляпунова: $V = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}x^2$.

Рассмотрим решение $x = \pm\sqrt{\alpha}, \quad y = 0$:

> Замена переменных: $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} = -\tilde{y} - (\tilde{x} \pm \sqrt{\alpha})(\mp\sqrt{\alpha}\tilde{x} + \tilde{x}^2) \end{cases}.$
> Линеаризуем систему: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & -1 \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = \ldots = \lambda^2 + \lambda - \alpha = 0.$
> Решения существуют только при $\alpha > 0$, поэтому все решения неустойчивые.



Пример

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \alpha y - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

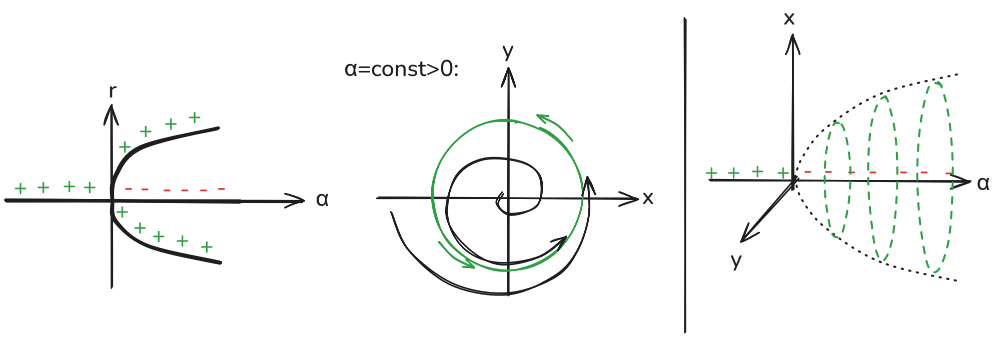
Заметим, что $\forall \alpha$ положение равновесия в $x = y = 0$.
Линеаризуем систему: $A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \det(A - \lambda E) = (\lambda - \alpha)^2 + 1 = 0.$
Решение линеаризованной системы: $\lambda = \alpha \pm i$.
Устойчиво при $\alpha < 0$, неустойчиво при $\alpha > 0$, устойчиво при $\alpha = 0$ (доказывается с функцией Ляпунова $V = x^2 + y^2$)

Замечание: кривая равновесия одна и не ответвляется.

В этом примере есть не только положение равновесия, но и предельный цикл. Рассмотрим систему в полярных координатах:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x} = \alpha r\cos\varphi - r\sin\varphi - r^3\cos\varphi \\ \dot{y} = r\cos\varphi + \alpha r\sin\varphi - r^3\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} \dot{r} = r(\alpha - r^2) \\ \dot{\varphi} = 1 \end{cases}$$

Уравнения разделяются, и можно рассмотреть только первое. Для него бифуркационная диаграмма типа "вилка".



При изменении бифуркационного параметра меняются корни характеристического уравнения. Рассмотрим сценарии перехода λ_i. При переходе через центр мнимой плоскости $\lambda_i = 0$ потеря устойчивости типа *дивергенция*, а при переходе через мнимую ось $\lambda_i = 0 + bi$ потеря устойчивости типа *флаттер* (изначально: устойчивые колебания крыльев самолёта).