Колебания линейных стационарных систем

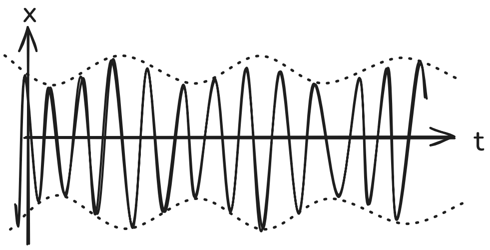
Вынужденные колебания в линейных системах

Обозначения: ОРО — общее решение однородного уравнения, ЧРН — частное решение неоднородного уравнения.

Пример

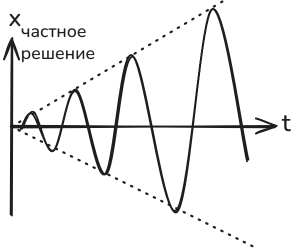
$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f\sin(\omega t)$
Решение уравнения неоднородного уравнения $x = x_{ОРО} + x_{ЧРН}$. Однородное уже решали: $x_{ОРО} = C\sin(\omega_0 t + \alpha)$.
Попробуем вид $x_{ЧРН} = a\sin(\omega t)$; после подставления получаем $a = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$, если $\omega \neq \omega_0$. Решение

$$x = C\sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$$



Случай $\omega = \omega_0$ (*резонанс*). Нужно искать ЧРН в виде $x_{ЧРН} = bt\cos(\omega t)$; после подставления получаем $b = -\frac{f}{2\omega_0}$. Решение

$$x = C\sin(\omega_0 t + \alpha) - \frac{f}{2\omega_0} t\cos(\omega_0 t).$$



Пример

$A\ddot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}, \quad A, C = \mathrm{const}, \quad A, C$ положительно определены, $\vec{Q} = \vec{Q}_0\sin(\omega t), \quad \vec{Q}_0 = \mathrm{const}.$
Считаем, что $\vec{q} = 0$ устойчиво в невозбуждённой системе $\vec{Q} = \vec{0}$.
Как при анализе малых колебаний, перейдём к нормальным координатам $\vec{q} \to \vec{\xi}: \quad \vec{q} = \sum_{i=1}^n \vec{e}_i\xi_i = U\vec{\xi}$.
Знаем, что при замене координат матрица A перейдёт в единичную $E = U^T AU$, матрица C перейдёт в диагональ $K = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \dots \omega_n^2) = U^T CU$.
Вектор $\vec{Q}$ меняется согласно правилу: работа сил на виртуальных перемещениях не зависит от СК. Работа сил: $(\vec{Q}, \delta\vec{q}) = (\vec{Q}, U\delta\vec{\xi}) = (U^T\vec{Q}, \delta\vec{\xi})$. Тогда $\vec{\Theta} = U^T\vec{Q}$, и при $\vec{\Theta} = [\Theta_1, \dots \Theta_n]^T\sin(\omega t)$ выразим $\Theta_i = (\vec{Q}, \vec{e}_i)$.
Уравнения $A\ddot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}$ перейдут в

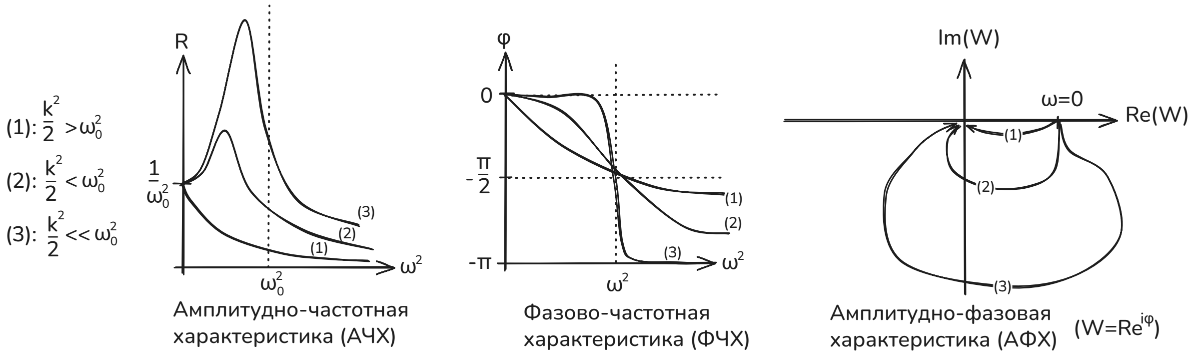
$$\ddot{\vec{\xi}} + K\vec{\xi} = \vec{\Theta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = \Theta_1\sin(\omega t) \\ \dots \\ \ddot{\xi}_n + \omega_n^2\xi_n = \Theta_n\sin(\omega t) \end{cases}$$

1. Случай $\left[\begin{array}{l} \omega_i \neq \omega, \quad \forall i = \overline{1, n} \\ \exists k: \quad \omega = \omega_k, \quad \Theta_k = 0 \end{array}\right.$
   Решение в новых переменных: $\xi_i = C_i\sin(\omega_i t + \alpha_i) + \frac{\Theta_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$
   Решение в старых переменным: $\vec{q} = \sum_{i=1}^n C_i\vec{u}_i\sin(\omega_i t + \alpha_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\Theta_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\vec{u}_i\sin(\omega t)$
2. Случай $\exists k: \quad \omega = \omega_k, \quad \Theta_k \neq 0.$
   Решение: $\vec{q} = \sum_{i=1}^n C_i\vec{u}_i\sin(\omega_i t + \alpha_i) + \sum_{i=1,\, i\neq k}^n \frac{\Theta_i}{\omega_i^2 - \omega^2}\vec{u}_i\sin(\omega t) + \vec{u}_k\frac{\Theta_k t}{2\omega_k}\cos(\omega t)$

Рассмотрим негармоническое возмущение вида $\vec{Q} = \vec{Q}_0\psi(t), \quad \psi(t+T) = \psi(t), \quad \forall t.$
Можно разложить функцию в ряд Фурье $\vec{Q} = \vec{Q}_0\left[\sum_{n=1}^\infty a_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}t + \varphi_n\right)\right]$.
Соответствующее решение будет ОРО+ЧРН: $\vec{q} = \vec{q}_{ОРО} + \sum_{n=1}^\infty \vec{q}_n$.
Здесь, для резонанса достаточно кратности собственной частоты с частотой возбуждения: $\exists n \in \mathbb{N}: \quad \omega = n\omega_0, \quad \Theta_n \neq 0, \quad a_n \neq 0$

Пример

$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega_0^2 x = f\sin(\omega t), \quad k > 0$. (система с диссипацией)
Поскольку равновесие невозбуждённой системы устойчиво асимптотически, решение однородного уравнения при соответствующих НУ стремится к нулю $x_{ОРО} \to 0$, и для исследования *установившихся* колебаний достаточно рассматривать только частное решение $x_{ЧРН}$.
Подбираем $x_{ЧРН}$ в виде $fT\sin(\omega t + \varphi)$; при подстановке получаем $R = \left[(\omega^2 - \omega_0^2) + k^2\omega^2\right]^{-1/2}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{k\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$



Обобщим на случай нескольких степеней свободы

Пример

$A\ddot{\vec{q}} + B\dot{\vec{q}} + C\vec{q} = \vec{Q}_0 e^{i\omega t}$
Заметим, действительная и мнимая части решения комплексного уравнения есть решения действительного уравнения с вынужденным колебанием косинуса и синуса: $\vec{Q}_0\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(Q_0 e^{i\omega t}), \quad \vec{Q}_0\sin(\omega t) = \mathrm{Im}(Q_0 e^{i\omega t})$
Полагаем, $\vec{q} = 0$ устойчиво асимптотически при $\vec{Q}_0 = 0$, чтобы рассматривать только ЧРН. Это справедливо когда $\det(D(\lambda)) = 0 \iff \mathrm{Re}\lambda < 0, \quad D(\lambda) = A\lambda^2 + B\lambda + C$.
Ищем ЧРН в виде $\vec{q}_{ЧРН} = \vec{h}e^{i\omega t}$; после подстановки получим $\vec{h} = D^{-1}(i\omega)\vec{Q}_0 = W(i\omega)\vec{Q}_0$.
Замечание: $\det D(i\omega) \neq 0$, т.к. $\det(D(\lambda)) = 0 \iff \mathrm{Re}\lambda < 0$, а $i\omega$ – чисто мнимое число.
Решение: $\vec{q} \approx \vec{q}_{ЧРН} = W(i\omega)\vec{Q}_0 e^{i\omega t}$. Обозначим элементы $W(i\omega) = \left[w_{k_j}\right]^T, \vec{Q} = [Q_{10}, \ldots Q_{n0}]^T$.
Как меняются координаты: $q_k = \sum_j W_{k_j}(i\omega)Q_{j0}e^{i\omega t} = \sum_j |W_{k_j}(i\omega)|Q_{j0}e^{i(\omega t + \varphi_{k_j})}$, где φ_{k_j} – аргумент $\arg W_{k_j}$.
Тогда W_{k_j} – амплитудно-фазовые характеристики, характеризующие отклик k-й координаты q_k при возбуждении по j-й координате Q_{j0}.