Случай Эйлера.

Задача о движении твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера – движение тела по инерции $\vec{M}_O = 0$.
Динамические уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = M_\xi \\ B\dot{q} + (A-C)rp = M_\eta \\ C\dot{r} + (B-A)pq = M_\zeta \end{cases}$$

Первые интегралы:

$$\begin{aligned} 1)\quad & Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h \\ 2)\quad & A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2 \end{aligned}$$

Доказательство:

следует из основных теорем динамики
$\vec{M}_O = 0 \quad \to \quad \dot{T} = \left(\vec{F}, \vec{v}_O\right) = 0, \quad \to \quad T = \text{const}.$
$\vec{M}_O = 0 \quad \to \quad \vec{K}_O = \text{const} \quad \to \quad K_O^2 = \text{const} = k^2$

Теорема

Динамические уравнения Эйлера в случае Эйлера интегрируются в квадратурах

Доказательство:

вырожденный случай: $A = B = C \quad \to \quad \dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$
допустим, $A \neq B$. Воспользуемся первыми интегралами:
$2hA - k^2 = (A-b)Bq^2 + (A-C)Cr^2, \quad 2hB - k^2 = (B-A)Ar^2 + (B-C)Cr^2$
$q^2 = \frac{2hA - k^2 - (A-C)Cr^2}{A-B} = f_1(r)$
Аналогично, $p^2 = \ldots = f_2(r)$. Тогда $C\dot{r} = \pm(A-B)\sqrt{f_1(r)f_2(r)}$, можно выразить $r = r(t, r_0, h, k)$

Геометрические интерпретации движения

Теорема (Пуансо):

При движении твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера эллипсоид инерции тела в неподвижной точке катится по неподвижной плоскости без проскальзывания.

Доказательство:

Эллипсоид инерции: $\Sigma = \{\vec{r} : f(r) = 0\}, \quad f(r) = \left(\mathbb{J}_O\vec{r}, \vec{r}\right) - 1$
Пусть есть точка P, принадлежащую эллипсоиду инерции Σ и лежащую на оси вращения $Ol \parallel \vec{\omega} : \overline{OP} = \lambda\vec{\omega}, \quad \left(\mathbb{J}_O\lambda\vec{\omega}. \lambda\omega\right) = 1$
$\lambda = \sqrt{1/2h}$
Нормаль к поверхности $\vec{n} = \frac{\text{grad} f(\vec{r})}{|\text{grad} f(\vec{r})|} = \frac{\mathbb{J}_O\vec{r}}{|\mathbb{J}_O\vec{r}|}$. В точке $P : \vec{n}_P = \frac{\mathbb{J}_O\lambda\vec{\omega}}{|\mathbb{J}_O\lambda\vec{\omega}|} = \frac{\vec{K}_0}{K} = \text{const}$
Проведём через эту точку плоскость Π, ортогональную к вектору $\vec{n}$. Считаем расстояние от

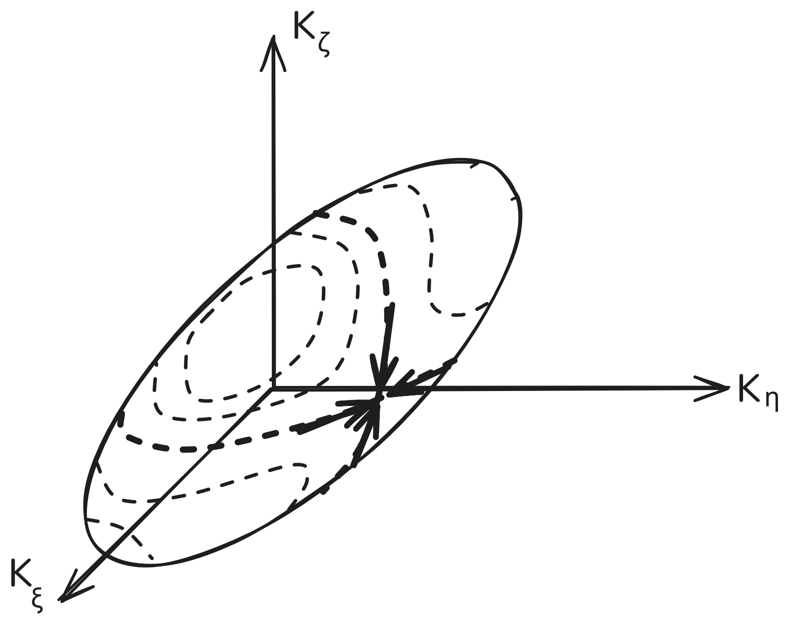
точки O до плоскости Π. Если это расстояние $\rho(O, \Pi)$ сохраняется, то плоскость неподвижна...
Без проскальзывания, потому что точка P остаётся на месте

Пусть кин. момент разложен на оси K_ξ, K_η, K_ζ. Рассмотрим поверхности:

- Сфера: $S = \{\vec{K} : K^2 = K_\xi^2 + K_\eta^2 + K_\zeta^2\}$
- Эллипсоид Мак-Гуллака: $\Phi = \{\vec{K} : \frac{K_\xi^2}{A} + \frac{K_\eta^2}{B} + \frac{K_\zeta^2}{C} = 2h\}$

Теорема (интерпретация Мак-Гуллака):

При движении твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера эллипсоид Мак-Гуллака обкатывает неподвижный конец вектора кин. момента по линии пересечения этого эллипсоида со сферой соответствующего радиуса. При этом, проекция угловой скорости на ось кин. момента постоянна.

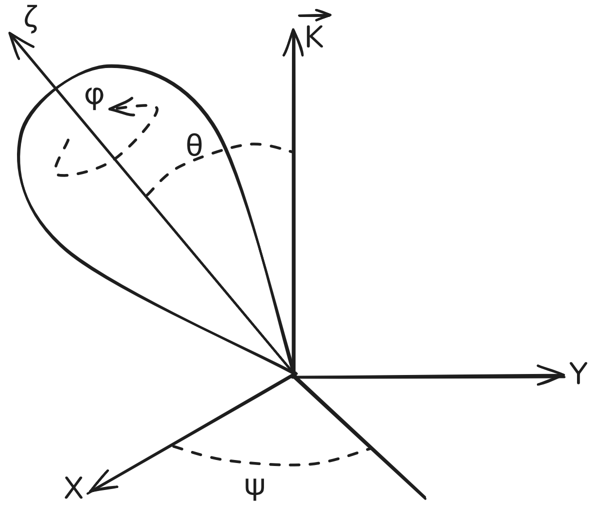


Теорема:

Движением динамически симметричного твёрдого тела $A = B$ в случае Эйлера является регулярная прецессия, ось которой совпадает с вектором кинетического момента.

Доказательство:

Пусть для симметричного тела $A = B \neq C$ постоянные кинетических момент $\vec{K} = \mathrm{const}, \quad \vec{M}_O = 0$. Можно ввести неподвижную СК вдоль вектора $\vec{e}_z \parallel \vec{K}$
Введём углы Эйлера: прецессии ψ и собственного вращения φ :



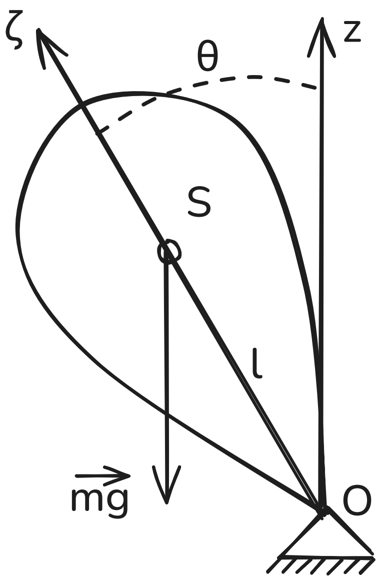
$$K_\zeta = k\cos\theta,\quad k = \text{const}$$
$$K_\xi = k\sin\theta\sin\varphi$$
$$K_\eta = k\sin\theta\cos\varphi$$

Вспомним, что $K_\zeta = Cr$. Тогда $\cos\theta = Cr/k$.
Из теоремы (о квадратурах) $A = B \quad\rightarrow\quad C\dot{r} = 0,\quad r = \text{const} \quad\rightarrow\quad \theta = \text{const}$
Тогда угловая скорость определяется только прецессией и собственным вращением: $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$

Случай Лагранжа.

Случай Лагранжа

Задача о движении динамически симметричного $A = B \neq C$ тела с неподвижной точкой O, центр масс которого и точка O лежат на оси симметрии в поле силы тяжести.



Замечание: центр масс тела не обязательно лежит на оси динамической симметрии.
Уравнения волчка интегрируются в квадратурах. Первые интегралы:

1. $$T + \Pi = h = \text{const}$$
$$\tfrac{1}{2}A(p^2+q^2) + \tfrac{1}{2}Cr^2 + mg\cos\theta = h$$
$$\tfrac{1}{2}A\left(\dot\theta^2 + \dot\psi^2\sin^2\theta\right) + \tfrac{1}{2}C\left(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi\right)^2 + mg\cos\theta = h \qquad (1)$$

2. $$K_z = \text{const} = k$$
$$(\vec M_O, \vec e_z) = 0,\ \ \dot{\vec e}_z = 0 \ \ \to \ \ K_z = \text{const}$$
$$\left(A(p\vec e_\xi + q\vec e_\eta) + Cr\vec e_\zeta, \vec e_z\right) = k = \text{const}$$
$$A(\dot\psi\sin\theta)\sin\theta + C(\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi)\cos\theta = k \qquad (2)$$

3. $$r = \text{const} = r_0$$
$$\dot\psi\cos\theta + \dot\varphi = r_0 \qquad (3)$$

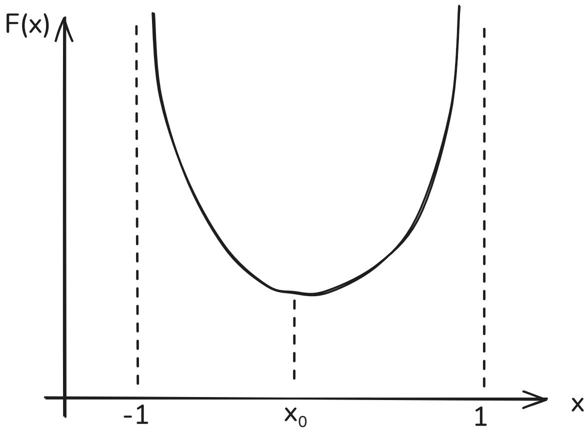
1. Сила тяжести потенциальна и стационарна, сила реакции опоры имеет нулевую мощность, а значит не меняет энергии
2. Кин. момент на Oz сохраняется из-за отсутствия момента
3. Сохраняется угловая скорость на оси динамической симметрии. Верно только из-за симметрии тела.
Замечание: есть 3 ПИ, уравнений 6. Но структура уравнений такова, что решить систему можно. Из квадратур мало понятно какое именно движение будет.

> **Интегрирование**
>
> $$(3),(2) \ \ \to \ \ A\dot\psi\sin^2\theta + Cr_0\cos\theta = k$$
> $$\dot\psi = \tfrac{k - Cr_0\cos\theta}{A\sin^2\theta},\ \ \theta \neq \pi,\ \ \theta\neq 0, \qquad (4)$$
> $$(4),(3),(1) \ \ \to \ \ A\dot\theta^2 + \tfrac{(k-Cr_0\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} + Cr_0^2 + 2mgl\cos\theta = 2h$$
> Тут 1 неизвестная – $\dot\theta$: $\dot\theta^2 = f(\theta) = \frac{h - Cr_0^2}{A} - 2\frac{mgl\cos\theta}{A} - \frac{(k-Cr_0\cos\theta)^2}{A^2\sin^2\theta} \qquad (5)$
> Система решается $\theta = \theta(t, \theta_0, h, k, r_0)$
> $(4) \ \ \to \ \ \psi = \psi(t, \theta_0, h, k, r_0, \psi_0)$
> $(3) \ \ \to \ \ \dot\varphi = r_0 - \dot\psi\cos\theta \ \ \to \ \ \varphi = \varphi(t, \theta_0, h, k, r_0, \varphi_0)$

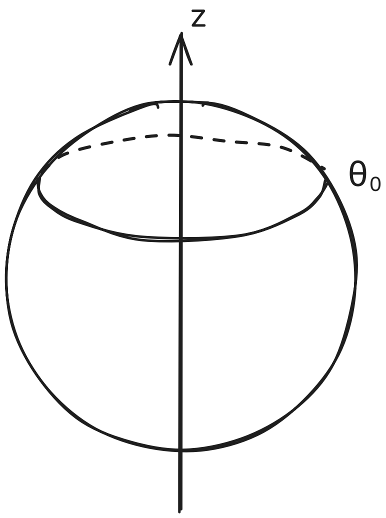
Геометрические интерпретации движения

Будем строить след центра масс на сфере соответствующего радиуса l.

$$(5) \ \ \to \ \ \dot\theta^2 \geq 0 \ \ \to \ \ F(\cos\theta) = F(x) = \tfrac{(\alpha - x)^2}{1-x^2} + \beta x \leq \gamma = \text{const},$$
$$\left(x = \cos\theta,\ \ \alpha = \tfrac{k}{Cr_0},\ \ \beta = \tfrac{mgl}{A}\left(\tfrac{k}{Cr_0}\right)^2 A^2,\ \ \gamma = \tfrac{h - Cr_0^2}{A}\left(\tfrac{k}{Cr_0}\right)^2 A^2\right)$$
$$F(x) = \ldots = \beta x - 1 + \tfrac{(1+\alpha)^2}{2(1+x)} + \tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1-x)}$$
$$F'_x(x) = \beta - \tfrac{(1+\alpha)^2}{2(1+x)^2} + \tfrac{(1-\alpha)^2}{2(1-x)^2}$$
$$F''_{xx}(x) = \tfrac{(1+\alpha)^2}{(1+x)^3} + \tfrac{(1-\alpha)^2}{(1-x)^3} \geq 0$$

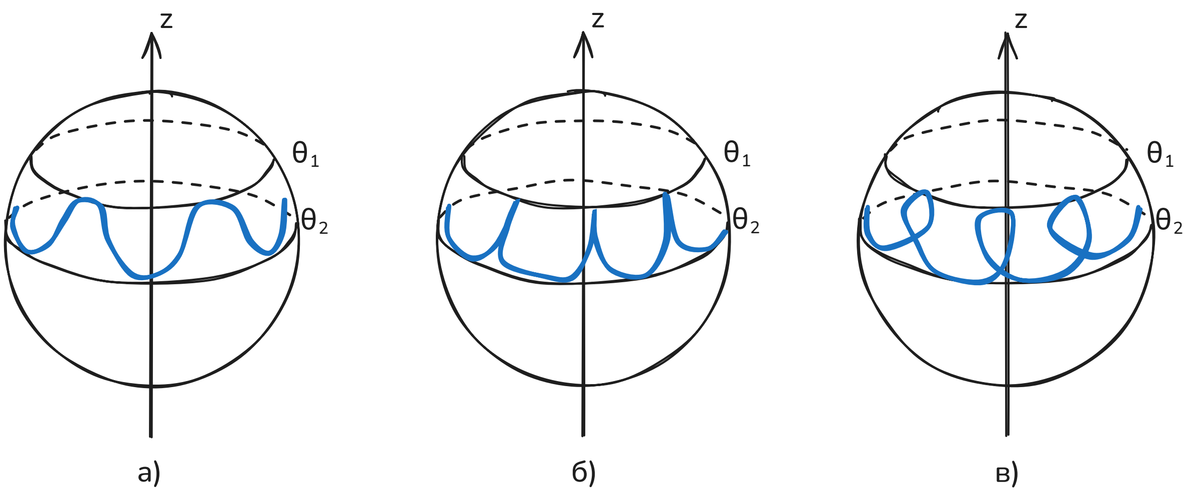


1. $\gamma < F(x_0) = \varnothing$ (нет такого движения)
2. Регулярная прецессия: $\gamma = F(x_0) \quad \rightarrow \quad x \equiv x_0 \quad \rightarrow \quad \theta = \arccos(x_0) = \text{const} \quad \rightarrow \quad \dot{\psi} = \text{const}, \dot{\varphi} = \text{const}$



3. $\gamma > F(x_0), \quad \arccos(x_1) \leq \theta(t) \leq \arccos(x_2)$. Если $\dot{\psi} = \frac{k - Cr_0 \cos\theta}{A \cos\theta}$, то $\dot{\psi} = 0$ когда $x = \alpha$

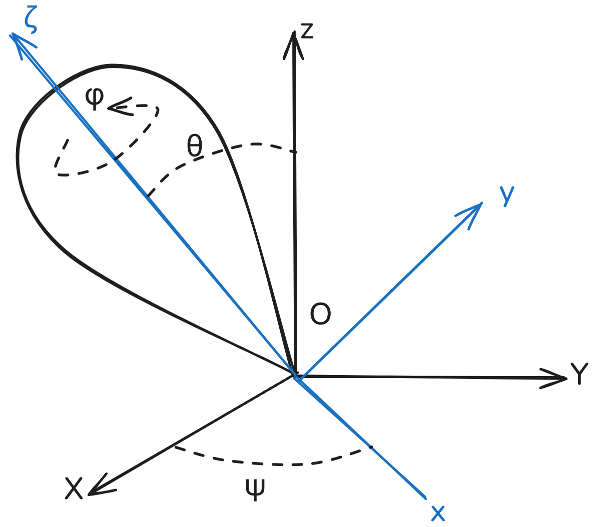
x=α



1. а) $\alpha \in (x_0, x_1)$
2. а) $\alpha = x_1 : \theta_1 = \theta(x = \alpha)$ – вертикальные линии при θ_1
3. а) $\alpha \in (x_1, 1) : \theta_1 > \theta(x = \alpha)$ – вертикальные линии при $\theta_* < \theta_1$, производные при θ_1, θ_2 разные

Случаи Ковалевской. Стационарные движения: перманентные вращения и регулярная прецессия. Гироскоп.

Регулярная прецессия. Пусть динамически симметричное $A = B \neq C$ тело совершает прецессию. Какой возбуждающий момент должен её поддерживать?



$$\vec{v}_O \equiv 0, \quad \theta = \text{const}, \quad \dot{\psi} = \text{const}, \quad \dot{\varphi} = \text{const}$$

Оси $Ox y\zeta$ – подвижная СО, неподвижная отн. тела, главные оси в $\forall t$. Момент сил: $\vec{M}_O = \frac{d\vec{K}_O}{dt}$. Кинетический момент: $\vec{K}_O = Ap\vec{e}_x + Aq\vec{e}_y + Cr\vec{e}_\zeta$. Тогда

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \dot{\vec{K}}_O + \left[\vec{\Omega} \times \vec{K}_O\right]$$

$$\dot{\psi}, \dot{\varphi} = \text{const} \quad \to \quad p, q, r = \text{const} \quad \to \quad \dot{\vec{K}}_O = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta \quad \to \quad \begin{cases} p = 0 \\ q = \dot{\psi}\sin\theta \\ r = \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{M}_O = \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_\zeta \\ 0 & \dot{\psi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\theta \\ 0 & A\dot{\psi}\sin\theta & C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) \end{bmatrix} = \ldots = \dot{e}_x\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\theta\left(C + (C - A)\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right)$$

Формула момента внешних сил, поддерживающих регулярную прецессию динамически симметричного твёрдого тела

$$\vec{M}_O = C[\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2]\left(1 + \frac{C - A}{C}\frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}}\cos\theta\right), \qquad \vec{\omega}_1 = \dot{\psi}\vec{e}_z, \;\; \vec{\omega}_2 = \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$$