1. Траектория / закон движения: $\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
    1. По умолчанию считаем $r(t)$ дважды непрерывно дифференцируемой
    2. Кривая регулярна: $|\boldsymbol{r}| \neq 0, \quad t \in [a, b]$
2. Натуральный параметр $s = \int_a^t |\boldsymbol{r}(\tilde{t})| d\tilde{t}$
3. Трёхгранник Френе (естественный, сопровождающий) / репер (базис) Френе:

$$\begin{array}{rl} \textit{Тангенциаль} & \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r}' = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \\ \textit{Нормаль} & \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'|} = \rho\boldsymbol{\tau}'. \\ \textit{Бинормаль} & \boldsymbol{b} = [\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}] \end{array}$$

    1. Кривизна: k
    2. Радиус кривизны: $\rho = 1/k$
4. Формулы Френе:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}' &= \frac{\boldsymbol{n}}{\rho} = k\boldsymbol{n}, \\ \vec{n}' &= -k\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\varkappa b}, \\ \vec{b}' &= -\boldsymbol{\varkappa n}. \end{aligned}$$

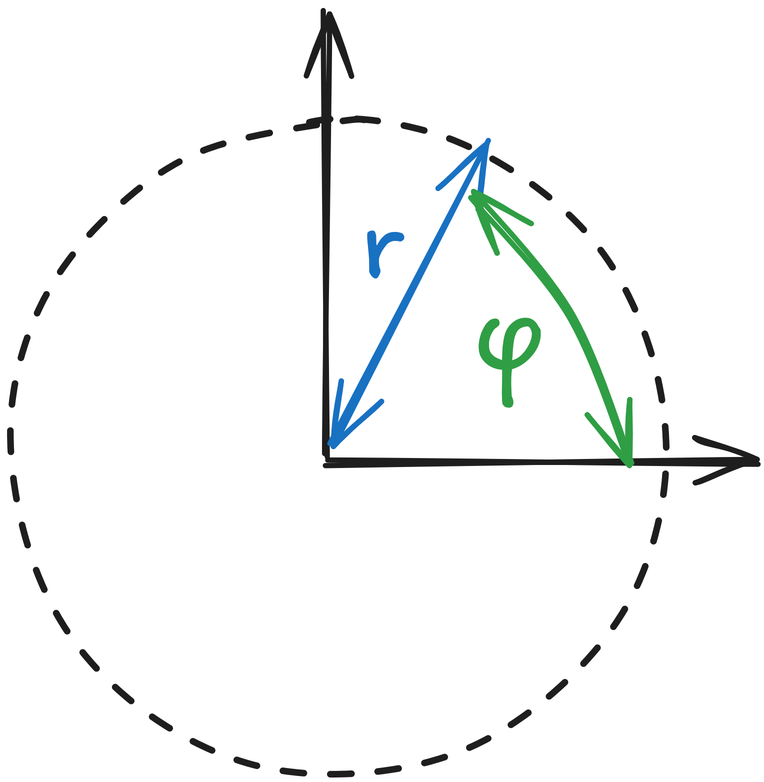
    1. Кручение: $\boldsymbol{\varkappa}$
5. Скорость точки

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z = \boldsymbol{r}'\dot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{\tau}\dot{\boldsymbol{s}} \quad \to \quad |v| = \dot{s} = \frac{ds}{dt},$$

6. Ускорение точки

$$\boldsymbol{w} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z = \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{|v|}\boldsymbol{\tau} + v^2\boldsymbol{\tau}' = \dot{|v|}\boldsymbol{\tau} + v^2k\boldsymbol{n} \quad \to \quad \boldsymbol{w} = w_\tau\boldsymbol{\tau} + w_n\boldsymbol{n}.$$

    1. Следствие: $k = |[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}]|/|v|^3$
7. Пример: движение по окружности
2. $\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \to \begin{cases} \dot{x} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y} = R\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} \to \begin{cases} \ddot{x} = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \\ y = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \end{cases}$
3. $\boldsymbol{v} = R\dot{\varphi}\vec{\tau}, \quad \vec{\tau} = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$
4. $\boldsymbol{\omega} = R\ddot{\varphi}\vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2\vec{n}, \quad \vec{n} = -\cos\varphi\vec{e}_x - \sin\varphi\vec{e}_y$
5. Видно, что вектора $\vec{\tau}, \vec{n}$ перпендикулярны друг другу
8. Координатные линии: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3)$ при $q_i = const$
9. Пример: полярные координаты



1.
2. Положение: $\vec{r} = r\vec{e}_r$
3. Скорость: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$
4. Формула движение точки по окружности (в данном случае, единичной)
   $\rightarrow \quad \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = (\varphi \dot{+} \pi/2)(-\vec{e}_r) = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$
5. $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$
6. Ускорение $\vec{w} = \dot{\vec{r}} = \ldots = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

10. ↳ Коэффициенты Ляме: ($\boldsymbol{e}$ – единичные вектора направлений криволинейных координат)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = H_i \vec{e}_i$$
$$H_i = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial q_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial q_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial q_i})^2}$$

11. ↳ Метрика пространства: $ds^2 = g_{lm} dq_l dq_m$. Если система криволинейных координат ортогональна, то метрика диагональная: $ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2$.

12. Скорость движущейся точки:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 = H_1\dot{q}_1\vec{e}_1 + H_2\dot{q}_2\vec{e}_2 + H_3\dot{q}_3\vec{e}_3 = \sum H_i \dot{q}_i \vec{e}_i.$$

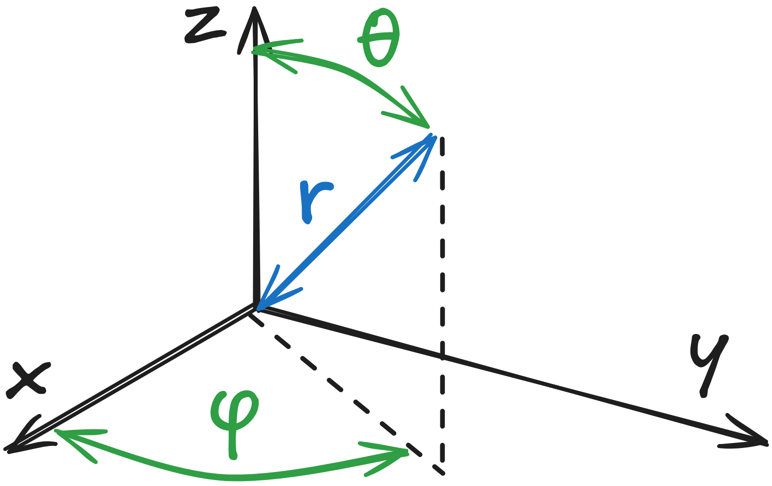
1. В *ортогональных* координатах $v^2 = \sum H_i^2 \dot{q}_i^2$
2. Как можно найти коэффициенты Ляме *проще*: $ds_i = H_i dq_i$

13. Ускорение точки при *ортогональном* базисе $\boldsymbol{e}_k$:

$$w_{e_j} = (\vec{w}, \vec{e}_j) = \frac{1}{H_j}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right].$$

1. Hint: $\frac{d\vec{r}}{dq_i} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{d\dot{q}_i} = \frac{d\vec{v}}{d\dot{q}_i}$
2. Hint: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_j \partial q_i}\dot{q}_j$

14. Пример: сферические координаты



1.
2. Если изменяется r, то длина кривой меняется на 1: $ds_i = dr \quad \rightarrow \quad H_r = 1$
3. $ds_\theta = rd\theta \quad \rightarrow \quad H_\theta = r$
4. $ds_\varphi = r\sin\theta d\varphi \quad \rightarrow \quad H_\varphi = r\sin\theta$
5. $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2$
6. $w_r = \ddot{r} - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2$
7. $w_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}) - 0\right] = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}$
8. $\omega_\theta = \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) - 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right] = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\sin(2\theta)\dot{\varphi}^2$