

Движение системы отсчёта относительно инерциальной

1. > Абсолютно **твёрдое тело** (АТТ) – множество точек, расстояние между которыми не меняется при любом его движении:

$$\{\vec{r}_i : |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = const\}$$

1. Условие невырожденности: таких точек хотя бы 3, и они неколлинеарные

$$[\overline{P_1 P_2} \times \overline{P_2 P_3}] \neq 0 \quad (1)$$

2. Рассмотрим 2 системы отсчёта: ИСК: $Oxyz$, ССК: $S\xi\eta\zeta$

3. > X – матрица **направляющих косинусов**:

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} (\vec{e}_\xi, \vec{e}_x) & (\vec{e}_\xi, \vec{e}_y) & (\vec{e}_\xi, \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\eta, \vec{e}_x) & (\vec{e}_\eta, \vec{e}_y) & (\vec{e}_\eta, \vec{e}_z) \\ (\vec{e}_\zeta, \vec{e}_x) & (\vec{e}_\zeta, \vec{e}_y) & (\vec{e}_\zeta, \vec{e}_z) \end{bmatrix} \quad (2)$$

1. Утверждение: X ортогональна: $X^T = X^{-1}$

4. Продифференцируем, получим некую матрицу Ω :

$$\begin{bmatrix} \dot{\vec{e}}_\xi \\ \dot{\vec{e}}_\eta \\ \dot{\vec{e}}_\zeta \end{bmatrix} = \dot{X} \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} \vec{e}_\xi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{bmatrix}, \quad \Omega = \dot{X}X^{-1} = \dot{X}X^T \quad (3)$$

5. Утверждение: Ω кососимметрическая: $\Omega + \Omega^T = 0$

1. Доказательство: $\square \quad \Omega + \Omega^T = \dot{X}X^T + X\dot{X}^T = \frac{d}{dt}E = 0 \quad \blacksquare$

6. Обозначение: $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_\zeta & -\omega_\eta \\ -\omega_\zeta & 0 & -\omega_\xi \\ \omega_\eta & -\omega_\xi & 0 \end{bmatrix}$

7. > **Угловая скорость** подвижного базиса: $\vec{\omega} = \omega_\xi \vec{e}_\xi + \omega_\eta \vec{e}_\eta + \omega_\zeta \vec{e}_\zeta$

1. Угловая скорость твёрдого тела – угловая скорость его ССК (пока что некорректное определение, потому что пока оно зависит от выбора базиса; корректность после формулы Эйлера)

8. $\triangleright$ Формулы Пуассона:

$$\dot{\vec{e}}_\xi = [\vec{\omega} \times \vec{e}_\xi], \quad \dot{\vec{e}}_\eta = [\vec{\omega} \times \vec{e}_\eta], \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = [\vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta]$$

9. $\hookrightarrow$ Утверждение: $\vec{\omega} = \vec{e}_\xi(\dot{\vec{e}}_\eta, \vec{e}_\zeta) + \vec{e}_\eta(\dot{\vec{e}}_\zeta, \vec{e}_\xi) + \vec{e}_\zeta(\dot{\vec{e}}_\xi, \vec{e}_\eta)$

10. $\hookrightarrow$ Утверждение: $\vec{\omega} = \frac{1}{2}([\vec{e}_\xi \times \dot{\vec{e}}_\xi] + [\vec{e}_\eta \times \dot{\vec{e}}_\eta] + [\vec{e}_\zeta \times \dot{\vec{e}}_\zeta])$

11. $\triangleright$ Формула Эйлера - распределение скоростей в твёрдом теле:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \overline{AB}], \quad \forall A, B \in ATT$$

1. Доказательство: $\square$ через формулу Пуассона $\blacksquare$

2. $\hookrightarrow$ Следствие: теорема о проекциях скоростей 2 точек твёрдого тела

1. Проекция скоростей 2 точек твёрдого тела на прямую, их соединяющую, равны

3. $\hookrightarrow$ Следствие: $\vec{v}_a = \vec{v}_b \rightarrow [\vec{\omega} \times \overline{AB}] = 0 \rightarrow \vec{\omega} \parallel \overline{AB}$

12. > Угловое ускорение твёрдого тела: $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$

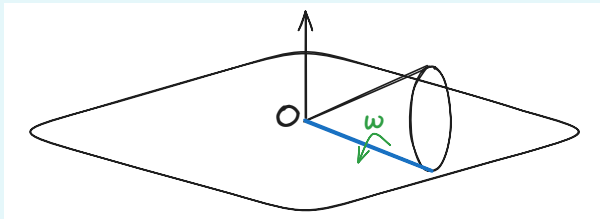
13. $\triangleright$ Формула Ривальса:

$$\vec{W}_B = \vec{W}_A + [\vec{\varepsilon} \times \overline{AB}] + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega}, \overline{AB}]]$$

1. Доказательство: $\square \vec{v}_B = \vec{v}_A + [\vec{\omega} \times \overline{AB}], \rightarrow \overline{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = [\vec{\omega} \times \overline{AB}] \blacksquare$
2. Ускорение вращательное $\vec{W}_{ep} = [\vec{\epsilon} \times \overline{AB}]$
3. Ускорение осеостремительное $\vec{W}_{oc} = [\vec{\omega} \times [\vec{\omega}, \overline{AB}]]$
4. Эти компоненты зависят от полюса A

14. $\Rightarrow$ Классификация движений АТТ:

9. % Поступательное движение: $\vec{\omega}(t) \equiv 0, \vec{v}_A = \vec{v}_B, \vec{W}_A = \vec{W}_B$
10. % Мгновенное поступательное движение: $\vec{\omega}(t^*) = 0, \vec{v}_A = \vec{v}_B, \vec{W}_A \neq \vec{W}_B$
11. % Вращение вокруг неподвижной оси: $\exists A, B : \vec{v}_A = \vec{v}_B \equiv 0$
 1. Пусть $\vec{e}_\zeta$ вдоль этой оси. Тогда $\vec{\omega} = \pm \dot{\varphi} \vec{e}_\zeta$
 2. Для точки P справедливо
12. % Плоско-параллельное движение: $\forall A \rightarrow \vec{v}_A \parallel Oxy$, где Oxy - некая неподвижная плоскость
 1. Угловая скорость так же не зависит от движения полюса S , и $\vec{\omega}, \vec{\epsilon} \parallel Oz$
 2. > Мгновенный центр скоростей: $\vec{v}_c(t^*) = 0$
 3. -> Теорема: Если угловая скорость АТТ при плоско-параллельном движении отлична от нуля, то $\exists$ точка тела, скорость которой равна 0: $\vec{\omega} \neq 0 \rightarrow \exists C \in ATT : \vec{v}_C = 0$
 1. Доказательство:
 1. $\square \exists Q \in ATT : \vec{v}_Q \neq 0$
 2. Ищем такую C , чтобы $\vec{v}_c = \vec{v}_Q + [\vec{\omega}, \overline{QC}] = 0$
 3. Домножим векторно слева на $\vec{\omega} \rightarrow \overline{QC} = [\vec{\omega} \times \vec{v}_Q] / \omega^2 \blacksquare$
 4. -> Теорема: Любое плоско-параллельное движение АТТ является либо мгновенно-поступательным, либо мгновенно-вращательным
13. % Твёрдое тело с неподвижной точкой $\vec{v}_o \equiv 0$
5. Если $\vec{\omega} = 0$ - мгновенный покой
6. Если $\vec{\omega} \neq 0$, то $\exists$ мгновенная ось вращения $l : O \in l, l \parallel \vec{\omega}$
7. 0 Пример: конус на плоскости без проскальзывания



1. Вершина O , касающаяся образующая мгновенно неподвижна, а значит, ось
8. 0 Пример: винтовое движение
 1. Тело равномерно вращается вокруг некоторой неподвижной оси, а скорость точек тела на этой оси постоянны, равны и сонаправлены с осью
14. % Общий случай
 1. -> Теорема: Если $\vec{\omega} \neq 0$, то $\exists$ такая ось $l \in ATT, l \parallel \vec{\omega}, \vec{v}_P \parallel l, \forall P \in l$
 1. Следствие: $\forall$ движение твёрдого тела является:
 1. либо мгновенно-поступательным $\omega = 0$
 2. либо мгновенно-вращательным $\omega \neq 0, \lambda = v(l) = 0$
 3. либо мгновенно-винтовым $\omega \neq 0, \lambda = v(l) \neq 0$
 1. λ - шаг винта: $\lambda = (\vec{\omega}, \vec{v}_Q) / \omega^2$ (для любой точки вроде одинаковый)

15. Теперь, есть ещё одна система отсчёта

1. $Oxyz$ - неподвижная СО
2. $S\xi\eta\zeta$ - движущаяся СО
3. $\vec{u}$ - некоторый вектор: $\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z = u_\xi \vec{e}_\xi + u_\eta \vec{e}_\eta + u_\zeta \vec{e}_\zeta$

16. > **Абсолютная** (глобальная) **производная** вектора:

$$\frac{d}{dt}\vec{u} = \dot{u}_x\vec{e}_x + \dot{u}_y\vec{e}_y + \dot{u}_z\vec{e}_z$$

17. > **Относительная** (локальная) **производная**:

$$\dot{\vec{u}} = \dot{u}_\xi\vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta\vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\vec{e}_\zeta$$

18. ☉ Пример:

18. $\dot{\vec{e}}_\xi = 0$

19. $\frac{d}{dt}\vec{e}_\xi = [\vec{\omega} \times \vec{e}_\xi]$ по формулам Пуассона

19. **Теорема** (связь абсолютной и относительной производной):

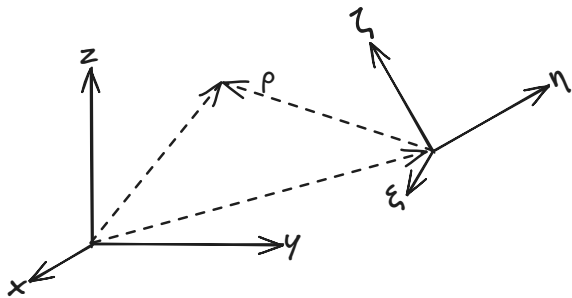
1. $\hookrightarrow \frac{d}{dt}\vec{u} = \dot{\vec{u}} + [\vec{\omega} \times \vec{u}]$

2. Доказательство: $\square \frac{d}{dt}\vec{u} = \dot{u}_\xi\vec{e}_\xi + \dot{u}_\eta\vec{e}_\eta + \dot{u}_\zeta\vec{e}_\zeta + u_\xi[\vec{\omega} \times \vec{e}_\xi] + u_\eta[\vec{\omega} \times \vec{e}_\eta] + u_\zeta[\vec{\omega} \times \vec{e}_\zeta] \blacksquare$

3. Следствие: для самой угловой скорости производные одинаковы $\frac{d}{dt}\vec{\omega} = \dot{\vec{\omega}}$

Движение материальной точки в неинерциальной системе отсчёта

1. Рассмотрим движение точки относительно двух систем отсчёта:



2. > **Абсолютная скорость** материальной точки: $\vec{v}_{abc} = \frac{d}{dt}\vec{r}$

3. > **Относительная скорость** материальной точки: $\vec{v}_{отн} = \dot{\vec{\rho}}$

4. > **Переносная скорость** – абсолютная скорость той точки подвижной СО, с которой совпадает движущаяся точка в данный момент времени: $\vec{v}_{пер} = [\vec{\omega} \times \vec{\rho}]$

5. **Теорема**:

1. $\hookrightarrow$

$$\vec{v}_{abc} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$$

2. Доказательство: $\square \vec{v}_{abc} = \frac{d}{dt}(\vec{R} + \vec{\rho}) = \frac{d}{dt}\vec{R} + \dot{\vec{\rho}} + [\vec{\omega} \times \vec{\rho}] \blacksquare$

6. > **Абсолютное и относительное ускорения**: $\vec{W}_{abc} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{abc}$, $\vec{W}_{отн} = \dot{\vec{v}}_{отн}$

7. > **Переносное ускорение** (из формулы Ривальса): $\vec{W}_{пер} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + [\vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{\rho}]]$

8. > **Кориолисово ускорение**: $\vec{W}_{кор} = 2[\vec{\omega} \times \vec{v}_{отн}]$

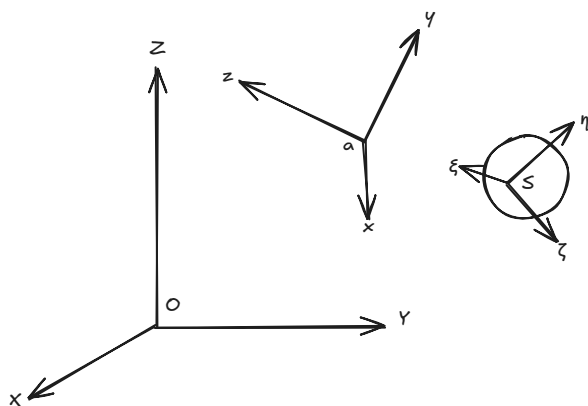
9. **Теорема**:

1. $\hookrightarrow$

$$\vec{W}_{abc} = \vec{W}_{отн} + \vec{W}_{кор} + \vec{W}_{пер}$$

Движение твёрдого тела в неинерциальной системе отсчёта

1. Рассмотрим движение тела относительно двух систем отсчёта:



2. > Абсолютная угловая скорость ω_{abc} : $S\xi\eta\zeta$ относительно $OXYZ$

3. > Относительная угловая скорость $\omega_{отн}$: $S\xi\eta\zeta$ относительно O_1xyz

4. > Переносная угловая скорость $\omega_{пер}$: O_1xyz относительно $OXYZ$

5. Теорема:

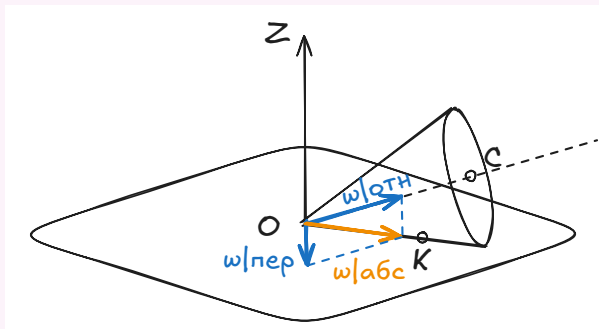
1. $\hookrightarrow$

$$\vec{\omega}_{abc} = \vec{\omega}_{отн} + \vec{\omega}_{пер}$$

2. Доказательство: $\square$ через формулу Эйлера для скоростей $\blacksquare$

3. Следствие: $\vec{\omega} = \sum_{i=1}^n \vec{\omega}_i$, где $\vec{\omega}_i$ - угловая скорость i -й СО относительно $(i-1)$ -й, а $\vec{\omega}$ - i -й относительно 0-й

6. $\odot$ Пример: качение без проскальзывания конуса по неподвижной плоскости Π



1. На образующей точка контакта K: $\vec{v}_K = 0$

2. $\vec{\omega}_{abc} \parallel \overline{OK}$

3. Введём $Oz \perp \Pi$, и подвижную систему отсчёта zOK (вращается вокруг Oz)

4. Середина основания конуса C лежит в zOK , т.е. неподвижна в подвижной системе отсчёта

5. $\overline{OC} \parallel \vec{\omega}_{отн}$

6. Ось Oz неподвижна в подвижной системе отсчёта

7. $\vec{\omega}_{пер} \parallel Oz$

7. Замечание: $\vec{\omega}$ есть $\vec{\omega}_{пер}$ в формуле $\frac{d}{dt}\vec{u} = \dot{\vec{u}} + [\vec{\omega}_{пер} \times \vec{u}]$

8. > Абсолютное угловое ускорение $\vec{\epsilon}_{abc} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{abc}$

9. > Относительное угловое ускорение $\vec{\epsilon}_{отн} = \dot{\vec{\omega}}_{отн}$

10. > Переносное угловое ускорение $\vec{\epsilon}_{пер} = \frac{d}{dt}\vec{\omega}_{пер} = \dot{\vec{\omega}}_{пер}$

11. Теорема:

1. $\hookrightarrow$

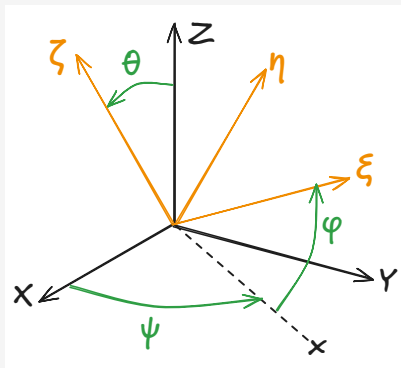
$$\vec{\epsilon}_{abc} = \vec{\epsilon}_{отн} + \vec{\epsilon}_{пер} + [\vec{\omega}_{пер} \times \vec{\omega}_{отн}]$$

2. Доказательство: $\square$ через дифференцирование $\vec{\epsilon}_{abc}$ $\blacksquare$

Углы Эйлера

1. > **Углы Эйлера** – исторически первый способ задания ориентации:

- | | | | |
|----|----------------------|-------------------------------|-------------------------|
| 1. | Прецессия | $\psi = \angle(OX, Ox)$ | $\psi \in [0, 2\pi)$ |
| 2. | Нутация | $\theta = \angle(OZ, O\zeta)$ | $\theta \in (0, \pi)$ |
| 3. | Собственное вращение | $\varphi = \angle(Ox, O\xi)$ | $\varphi \in [0, 2\pi)$ |



2. > **Линия узлов** $Ox = OXY \cap O\xi\eta$

1. Координаты вырождаются $\theta = \{0, \pi\}$

3. Последовательность 3-х поворотов $OXYZ \rightarrow O\xi\eta\zeta$

- $OXYZ \rightarrow Oxyz$ - поворот на угол ψ вокруг OZ
- $Oxyz \rightarrow Oxy'\zeta$ - поворот на угол θ вокруг Ox
- $Oxy'\zeta \rightarrow O\xi\eta\zeta$ - поворот на угол φ вокруг $O\zeta$
- Матрица поворота – произведение 3 матриц поворота

5. Активная точка зрения: матрицы поворотов перемножаются в обратном порядке.
Пассивная точка зрения: матрицы поворотов перемножаются в прямом порядке.

6. $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{abc} = \dot{\psi}\vec{e}_Z + \dot{\theta}\vec{e}_x + \dot{\varphi}\vec{e}_\zeta$ - запись неудобная, векторы в 3 разных СО

7. Лучше спроецировать равенство на $O\xi\eta\zeta$

- $\vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_\xi - \sin \varphi \vec{e}_\eta$
- $\vec{e}_Z = \cos \theta \vec{e}_\zeta + \sin \theta (\sin \varphi \vec{e}_\xi + \cos \varphi \vec{e}_\eta)$

4. **Кинематические формулы Эйлера:**

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}\end{aligned}$$

5. > **Прецессионное движение** – некая неподвижная в теле ось движется по поверхности неподвижного кругового конуса ($\theta = \text{const}$)

6. > Регулярная прецессия - если $\theta = \text{const}$, $\dot{\varphi} = \text{const}$, $\dot{\psi} = \text{const}$

Алгебра кватернионов

1. **Алгебраические структуры**

- Поле $F(\mathbb{R})$: множество элементов с операциями $\{+, *\}$ с нужными свойствами
- Векторное пространство $V(F)$ с размерностью $\dim V = n$: множество упорядоченных элементов с операциями $+$ между векторами и $*$ со скаляром
- Алгебра - $V(F)$ с билинейной операцией $\times$ между векторами

2. > **Алгебра над полем $\mathbb{A}$** - векторное пространство над полем, снабжённое билинейной операцией умножения:

$$\begin{aligned}V \times V &\rightarrow V: \\ \mathbb{A}(\alpha x + \beta y, z) &= \alpha \mathbb{A}(x, z) + \beta \mathbb{A}(y, z) \\ \mathbb{A}(x, \alpha y + \beta z) &= \alpha \mathbb{A}(x, y) + \beta \mathbb{A}(x, z)\end{aligned}$$

1. В 3-х мерном пространстве $\times$ - векторное произведение
2. В 2-х мерном пространстве $\times$ - произведение комплексных чисел
3. В 4-х мерном пространстве $\times$ - произведение кватернионов (гиперкомплексных чисел)

3. > Алгебра кватернионов - 4-х-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, в котором операция умножения базисных элементов $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ определяется следующим образом:

$$\begin{array}{llll} \vec{e}_0 \circ \vec{e}_0 = \vec{e}_0 & \vec{e}_0 \circ \vec{e}_1 = \vec{e}_1 & \vec{e}_0 \circ \vec{e}_2 = \vec{e}_2 & \vec{e}_0 \circ \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_1 \circ \vec{e}_0 = \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \circ \vec{e}_1 = -\vec{e}_0 & \vec{e}_1 \circ \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \circ \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \circ \vec{e}_0 = \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \circ \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \circ \vec{e}_2 = -\vec{e}_0 & \vec{e}_2 \circ \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \circ \vec{e}_0 = \vec{e}_3 & \vec{e}_3 \circ \vec{e}_1 = \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \circ \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 & \vec{e}_3 \circ \vec{e}_3 = -\vec{e}_0 \end{array}$$

1. Обозначение: $\vec{e}_0 = 1$
2. Эквивалентная форма $\vec{e}_i \circ \vec{e}_j = -(\vec{e}_i, \vec{e}_j) + [\vec{e}_i, \vec{e}_j]$

4. Теорема Эйлера:

1. $\hookrightarrow$ Любое перемещение твёрдого тела с одной неподвижной точкой может быть заменено плоским поворотом вокруг некоторой оси на некоторый угол.

5. $\triangleright$ Кватернион $\Lambda = \lambda_0 \vec{e}_0 + \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3 = \lambda_0 + \vec{\lambda} \in \mathbb{H}$ имеет закон умножения со свойствами:

1. Ассоциативность : $(\Lambda \circ M) \circ N = \Lambda \circ (M \circ N)$
2. Дистрибутивность : $(\Lambda + M) \circ (N + R) = \Lambda \circ N + M \circ N + \Lambda \circ R + M \circ R$
3. Линейность : $(\lambda \Lambda) \circ (\mu M) = \lambda \mu \Lambda \circ M$
4. Некоммутативность : $\Lambda \circ M \neq M \circ \Lambda$

6. $\boxtimes$ Если $\Lambda = \lambda_0 + \vec{\lambda}$ и $M = \mu_0 + \vec{\mu}$, то

$$\Lambda \circ M = (\lambda_0 + \vec{\lambda}) \circ (\mu_0 + \vec{\mu}) = \lambda_0 \mu_0 - (\vec{\lambda}, \vec{\mu}) + \lambda_0 \vec{\mu} + \mu_0 \vec{\lambda} + [\vec{\lambda} \times \vec{\mu}]$$

7. > Норма кватерниона: $\|\Lambda\| = \Lambda \circ \bar{\Lambda} = \bar{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = |\Lambda|^2$

1. Свойство: $\|\Lambda \circ M\| = \|\Lambda\| \|M\|$

8. > Обратный кватернион: $\Lambda^{-1} = \frac{\bar{\Lambda}}{\|\Lambda\|}$ (при $\Lambda \neq 0$)

1. Нормированный кватернион: $\|\Lambda\| = 1$

9. $\boxtimes$ Тригонометрическая форма:

$$\Lambda = |\Lambda| \left(\frac{\lambda_0}{|\Lambda|} + \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|} \frac{|\vec{\lambda}|}{|\Lambda|} \right) = |\Lambda| (\cos \nu + \vec{e} \sin \nu)$$

10. $\odot$ Пример: произведение кватернионов с коллинеарной векторной частью

1. $\Lambda_1 = |\Lambda_1| (\cos \nu_1 + \vec{e} \sin \nu_1)$
2. $\Lambda_2 = |\Lambda_2| (\cos \nu_2 + \vec{e} \sin \nu_2)$
3. $\Lambda_1 \circ \Lambda_2 = |\Lambda_1| |\Lambda_2| (\cos(\nu_1 + \nu_2) + \vec{e} \sin(\nu_1 + \nu_2))$
4. Следствие (аналог формулы Муавра): $\Lambda^n = |\Lambda|^n (\cos(n\nu) + \vec{e} \sin(n\nu))$

11. Теорема:

1. $\hookrightarrow$ Для $\forall$ положения твёрдого тела с неподвижной точкой $\exists$ нормированный Λ такой, что

$$\vec{e}'_i = \Lambda \circ \vec{e}_i \circ \bar{\Lambda},$$

где $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - неподвижный базис, а $E' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ связан с телом

12. > Присоединённое преобразование:

$$f(M) = \Lambda \circ M \circ \bar{\Lambda}, \quad \|\Lambda\| = 1 : \quad \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

1. Свойства:

$$1. f(\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2) = \alpha_1 f(M_1) + \alpha_2 f(M_2) \text{ (линейность)}$$

$$2. f(\Lambda) = \Lambda$$

$$3. f(\mu_0 + \vec{\mu}) = f(\mu_0) + f(\vec{\mu}) = \mu_0 + \Lambda \circ \vec{\mu} \circ \Lambda$$

$$2. \text{ Следствие 1: } \forall E, E' \rightarrow \exists f: f(\vec{e}_i) = \vec{e}'_i, \text{ аналогично } f(\vec{r}) = \sum r_i f(\vec{e}_i) = \sum r_i \vec{e}'_i = \vec{r}'$$

3. Следствие 2: при повороте твёрдого тела вокруг неподвижной точки справедливо равенство $\vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \bar{\Lambda}$, где $\vec{r}$ - начальное положение, $\vec{r}'$ - конечное положение, Λ задаёт соответствующее присоединённое преобразование

13. Теорема:

$$1. \hookrightarrow \text{Преобразование } \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \Lambda \circ \vec{r} \circ \Lambda, \text{ где } \Lambda = \cos \nu + \vec{e} \sin \nu, \text{ - поворот вокруг } O\vec{e} \text{ на угол } \varphi = 2\nu$$

14. > Параметры Родрига-Гамильтона – коэффициента кватерниона поворота

$$[\cos(\varphi/2), x \sin(\varphi/2), y \sin(\varphi/2), z \sin(\varphi/2)]$$

15. ☞ Сумма поворотов $E \xrightarrow{\Lambda} E' \xrightarrow{M} E''$ есть $E \xrightarrow{N} E''$, где $N = M \circ \Lambda$

57. Не совсем удобная формула, поскольку надо записывать их в одном базисе

58. = Формула сложения поворотов в параметрах Родрига-Гамильтона: $N = \Lambda \circ M^* = \Lambda^* \circ M^*$, где Λ^*, M^* собственные кватернионы ($M = \Lambda \circ M^* \circ \bar{\Lambda}$)

16. ☉ Пример: углы Эйлера как кватернион поворота

$$59. \text{ Поворот 1: } \Lambda_1 = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{e}_z \sin \frac{\psi}{2} \mid \text{ Собственный кватернион } \Lambda_1^* = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{e}_z \sin \frac{\psi}{2}$$

$$60. \text{ Поворот 2: } \Lambda_2 = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{e}_x \sin \frac{\theta}{2} \mid \text{ Собственный кватернион } \Lambda_2^* = \cos \frac{\theta}{2} + \vec{e}_x \sin \frac{\theta}{2}$$

$$61. \text{ Поворот 3: } \Lambda_3 = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e}_z \sin \frac{\varphi}{2} \mid \text{ Собственный кватернион } \Lambda_3^* = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e}_z \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$62. \text{ Общий поворот } N = \Lambda_1^* \circ \Lambda_2^* \circ \Lambda_3^*$$

17. Теорема:

1. $\hookrightarrow$

$$\vec{\omega} = 2\dot{\Lambda} \circ \bar{\Lambda}$$

18. ▶ Кинематическое уравнения Пуассона:

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \circ \Lambda = \frac{1}{2} \Lambda^* \circ \vec{\omega}^*$$

1. Если подставить углы Эйлера - получим кинематические уравнения Эйлера

2. Пусть $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$. Тогда $\dot{\Lambda} \equiv \dot{\lambda}_0 + \dot{\lambda}_1 \vec{e}_1 + \dot{\lambda}_2 \vec{e}_2 + \dot{\lambda}_3 \vec{e}_3$

19. ▶ Интегрирование уравнений Пуассона

1. Рассмотрим СДУ $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$

1. > Первый интеграл СДУ - функция $\Phi(\vec{x}, t)$, постоянная вдоль решения уравнения $\vec{x} = \vec{x}(t)$

2. ☉ Пример: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$. Первый интеграл: $\Phi = x^2 + y^2 - C$, поскольку $\dot{x}x + \dot{y}y = \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 0$

3. Утверждение: $\|\Lambda\| = \text{const}$ - первый интеграл системы

1. Следствие: если $\|\Lambda(0)\| = 1$, то $\forall t > 0 \rightarrow \|\Lambda(t)\| = 1$

4. Утверждение: общее решение уравнений Пуассона имеет вид: $\Lambda(t) = \Lambda'(t) \circ C$, где $\Lambda'(t)$ - общее решение, $C = \text{const} \in \mathbb{H}$

5. Пусть возьмём $\Lambda(0) = 1$ (иначе поменяем базис)

1. Случай 1: вращение вокруг неподвижной оси

$$1. \vec{\omega} = \omega \vec{e}, \text{ где } \vec{e} = \text{const}$$

$$2. \Lambda = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$$

2. Случай 2: прецессия

$$1. \vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_Z + \omega \vec{e}_\zeta, \text{ где}$$

$$\omega_1 = \omega_1(t), \quad \omega_2 = \omega_2(t), \quad \vec{e}_Z = \text{const}, \quad (\vec{e}_Z, \vec{e}_\zeta) = \text{const}, \quad \dot{\vec{e}}_\zeta = [\omega_1 \vec{e}_Z \rightarrow \vec{e}_\zeta]$$

$$2. \Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1$$

$$1. \Lambda_1 = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e}_\zeta(0) \sin \frac{\varphi}{2}$$

$$2. \Lambda_2 = \cos \frac{\psi}{2} + \vec{e}_Z \sin \frac{\psi}{2}$$

$$3. \varphi = \int_o^t \omega_2(\tau) d\tau, \quad \psi = \int_o^t \omega_1(\tau) d\tau$$

$$3. \Lambda = \left(\cos \frac{\psi}{2} + \vec{e}_Z \sin \frac{\psi}{2} \right) \circ \left(\cos \frac{\varphi}{2} + (\vec{e}_X \sin \theta + \vec{e}_Z \cos \theta) \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

20. > Спиновые матрицы Паули – матричная интерпретация алгебры кватернионов:

$$i_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad i_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$