Задача 3 тел

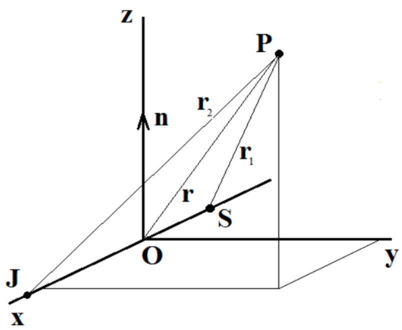
Пусть есть m_0, m_1, m_2 с векторами $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$. Для анализа орбит справедливо $\vec{r}_0+\vec{r}_1+\vec{r}_2=0$. Чтобы движение каждого тела из 3-х было кеплеровым, требуется удовлетворить:

$$\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = -\gamma a_i \frac{\vec{r}_i}{r_i^3}$$

Эти тождества выполняются в 2 случаях:

1. (эйлеровы случаи) Векторы $\vec{r}_i$ коллинеарны: 3 сценария следования масс
2. (лагранжевы случаи) $r_0=r_1=r_2 \to a_0=a_1=a_2=\sum m_i$: 2 сценария расположения треугольника (начальные условия: $\frac{d\vec{r}_0}{dt}+\frac{d\vec{r}_1}{dt}+\frac{d\vec{r}_2}{dt}=0$)

<u>Планетоидная задача трёх тел</u>



Круговая ограниченная задача трёх тел: 2 массивных тела движутся по круговым орбитам. Массы тел $S, J, P:\ m_1 \geq m_2 \gg m$. Начало координат в центре масс $S, J:$ тело S в $[-d_1, 0, 0]$, тело J в $[d_2, 0.0]$. Угловая скорость вращения: n. По закону Кеплера:

$$n^2(d_1+d_2)^3=\mu, \quad \mu=\gamma(m_1+m_2).$$

Тогда кинетическая энергия равна $T=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}-ny\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}+nx\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$, силовая функция равна $U=\gamma\left(\frac{mm_1}{r_1}+\frac{mm_2}{r_2}+\frac{m_1m_2}{d_1+d_2}\right)$ (последнее слагаемая константа $\to$ опускается).
Введём функцию $\Omega=\frac{1}{2}n^2(x^2+y^2)+\gamma\left(\frac{m_1}{r_1}+\frac{m_2}{r_2}\right)$.
Из уравнений Лагранжа выводится **интеграл Якоби**: (C' – постоянная интеграла Якоби)

$$\boxed{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2\Omega-C'}$$

Свойства интеграла:

1. *Поверхность нулевой относительной скорости* $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=0$ отделяет области, где относительная скорость вещественна / мнимая. Уравнение поверхности:

$$2\Omega=C'$$

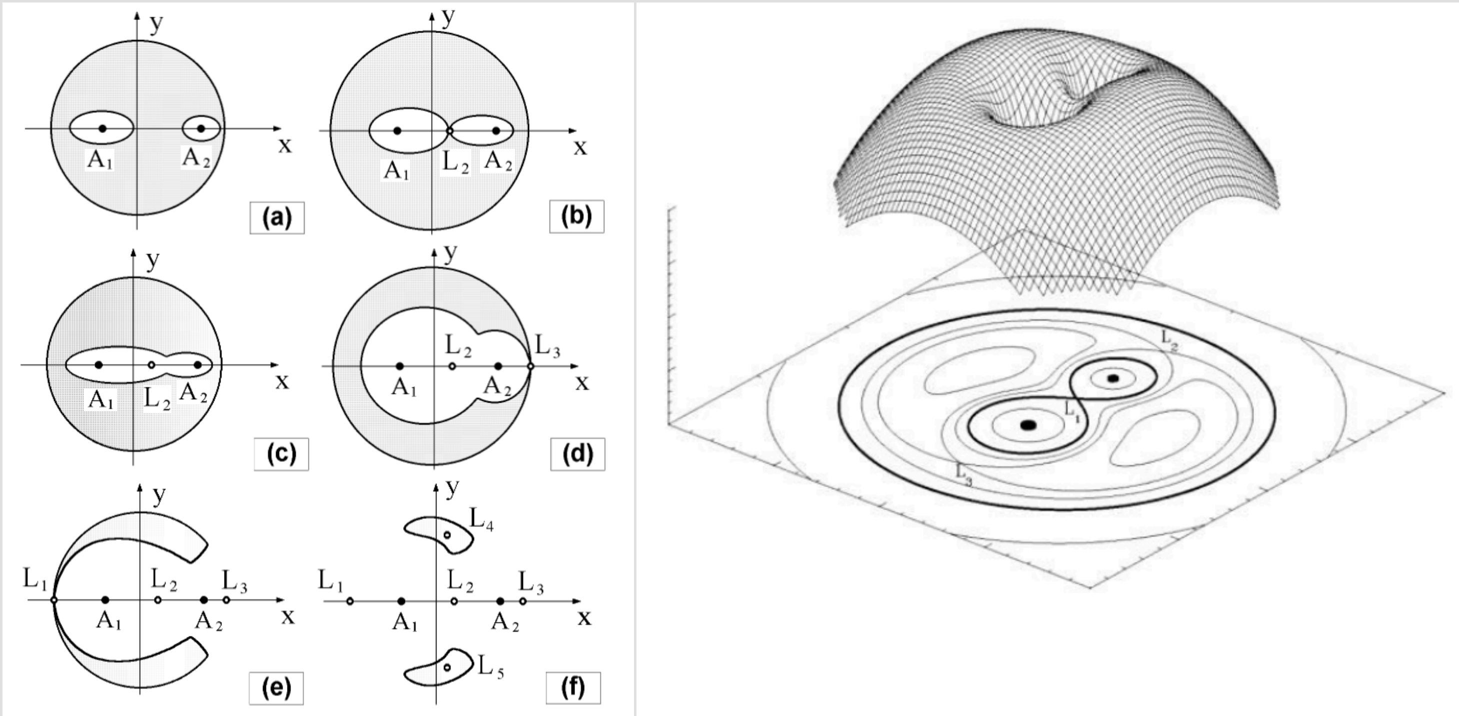
2. Допустим $\gamma=1$, $d_1+d_2=1$. Такая *поверхность* задаётся уравнениями:

$$(m_1+m_2)(x^2+y^2)+\frac{2m_1}{r_1}+\frac{2m_2}{r_2}=C'.$$

3. Допустим, C' велико. Тогда превалирует один из слагаемых:
   1. Квазицилиндр: $(m_1+m_2)(x^2+y^2)\approx C'$
   2. Квазисфера: $\frac{2m_21}{r_1}=C'$

3. Квазисфера: $\frac{2m_2}{r_2} = C'$

<u>Особые точки поверхности нулевой скорости</u>



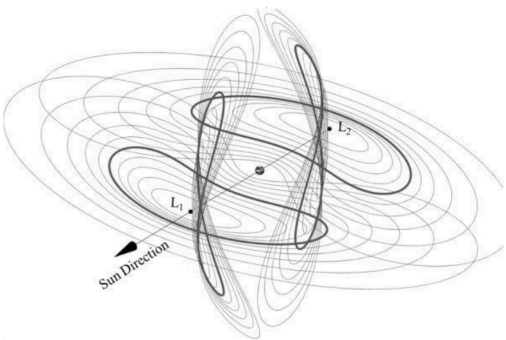
При уменьшении C' внутренние овалы расширяются, а внешняя поверхность сжимается и при некотором значении C_2 внутренние овалы касаются друг-друга в точке L_2.

Материальная точка P, находясь в особой точке поверхности и имея соответствующее значение константы C', будет не только неподвижна в системе координат $Oxyz$, но и её ускорения будут равны нулю.
Упомянутые выше условия кеплеровых орбит:

1. (эйлеровы случаи) коллинеарные точки либрации $L_1, L_2, L_3 -$ неустойчивые
2. (лагранжевы случаи) треугольные точки либрации $L_4, L_5 -$ устойчивые при $\frac{m_2}{m_1+m_2} < 0.038$ или $\frac{m_2}{m_1+m_2} > 1 - 0.038$

<u>Инвариантные многообразия как способ экономного передвижения по Солнечной системе</u>

Плоские и вертикальные орбиты Ляпунова в окрестностях коллинеарных точек либрации системы Солнце–Земля:



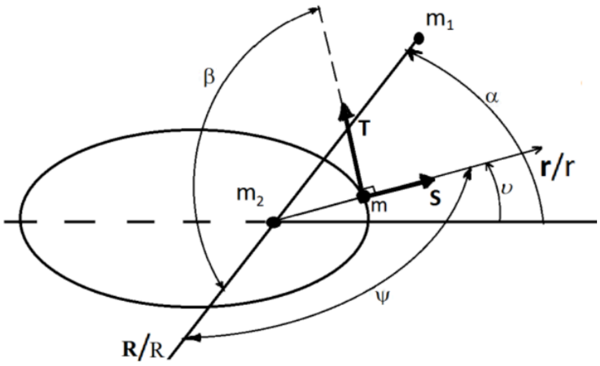
В достаточно малой окрестности коллинеарных точек либрации можно выделить четыре класса движений и соответствующие им орбиты:

1. Орбиты Ляпунова – периодические орбиты вокруг неустойчивых коллинеарных точек либрации
    1. Асимптотические орбиты, стремящиеся к орбитам Ляпунова или уходящие от них
    2. Орбиты, соответствующие транзитным орбитам. Движение КА в этом случае происходит из области главного тела в область второго тела или во внешнюю область

3. Орбиты, соответствующие нетранзитным орбитам. Движение КА между областями в этом случае не происходит.
2. Гало-орбиты

Движение КА при наличии двух притягивающих центров

Покажем, как могут быть получены количественные оценки путем обращения к системе уравнений движения, записанных в оскулирующих элементах.



Угол α до Солнца постоянен. Космический аппарат движется внутри сферы действия Земли, Солнце оказывает малые ускорения S, T, W. Возмущающее ускорение $b = \gamma m_1 \left(\frac{\boldsymbol{s}}{s^3} - \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}\right)$ приблизительно равно

$$\left|\frac{\vec{r}}{r^3} - \frac{\vec{R}}{R^3}\right| \approx \frac{1}{R^3}\left|\vec{r} - 3\frac{(\vec{R},\vec{r})}{R^2}\vec{R}\right| \quad \to \quad b = \frac{\gamma m_1}{R^2}\frac{r}{R}\left(\frac{\vec{r}}{r} - 4\frac{\vec{R}r}{Rr}\frac{\vec{R}}{R}\right)$$

Компоненты ускорения:

$$W = 0, \quad S = \frac{(\vec{b},\vec{r})}{r} = -\frac{\gamma m_1}{R^2}\frac{r}{R}\left(1 - 3\cos^2(\alpha-\nu)\right), \quad T = (\vec{b},\vec{e}_T) = \frac{3\gamma m_1}{R^2}\frac{r}{R}\cos(\alpha-\nu)\sin(\alpha-\nu)$$

1. Из $W = 0$ следует $\Delta\Omega = 0, \Delta i = 0$
2. Гравитационное поле двух притягивающих центров при $\alpha = 0$ консервативно $\to \quad \Delta a = 0$
3. Из громоздких выкладок $\to \Delta e = -15\pi\frac{m_1}{m_2}\left(\frac{a}{R}\right)^3 e\sqrt{1-e^2}\cos\alpha\sin\alpha$
    1. Аппарат может упасть на Землю