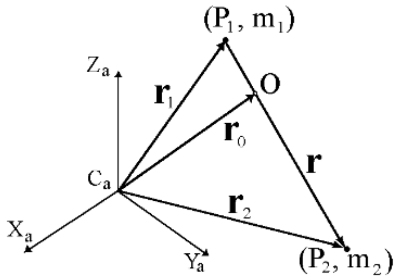
Задача 2 тел

Сила притяжения двух материальных точек:

$$\vec{F} = -f\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \quad f = 6.67 \times 10^{-11}\frac{м^3}{кг \times с^2}$$

Первые интегралы движения



Центр масс системы: $\vec{r}_0 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$. Из закона Ньютона следует $m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, при интегрировании следуют 2 первых интеграла: $(m_1 + m_2)\vec{r}_0 = \vec{a}t + \vec{b}$ (центр масс системы движется равномерно и прямолинейно).
Введя относительный вектор $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и *гравитационный параметр* $\mu = f(m_1 + m_2)$, получим:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} + \mu\frac{\vec{r}}{r^3} = 0. \quad (1)}$$

Уравнение (1) так же можно получить из уравнений Лагранжа для $\Pi = -f\frac{m_1 m_2}{r}$, $T = \frac{1}{2}\left(m_1\dot{r}_1^2 + m_2\dot{r}_2^2\right)$.

Умножив (1) скалярно на $2\dot{\boldsymbol{r}}$, получим **интеграл энергии** $(\dot{\vec{r}} = \vec{V})$

$$\boxed{h = V^2 - \frac{2\mu}{r},} \qquad \text{или} \qquad \frac{mV^2}{2} + (-\frac{m\mu}{r}) = \frac{mh}{2}.$$

Справа уравнение энергии $T + \Pi = E$. При $h < 0$ движение финитно, при $h > 0$ орбита $-$ гипербола.

Умножив (1) слева векторно на $\vec{r}$, получим **интеграл площадей** ($\vec{c}$ $-$ константа площадей)

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = 0, \quad \to \quad \boxed{\vec{c} = \vec{r} \times \vec{V}.}$$

Заметаемая площадь (2-й закон Кеплера): $S = \frac{1}{2}|\vec{c}|\Delta t$.

Умножив (1) справа векторно на $\vec{c}$, получим **интеграл Лапласа** ($\vec{f}$ $-$ вектор Лапласа)

$$\boxed{\vec{f} = \vec{V} \times \vec{c} - \mu\frac{\vec{r}}{r}}$$

Если раскрыть $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{V}$, то будет видно, что в экстремальных точках орбиты $\dot{r} = 0$ имеет место $\vec{r}\left(V^2 - \frac{\mu}{r}\right) = \vec{f}$, т.е. такие точки орбиты лежат на одной прямой $\parallel \vec{f}$.

К этому моменту, есть 7 скалярных интегралов системы 6-го порядка $\to$ *константы зависимы*

1. $(\vec{c}, \vec{f}) = 0$
2. $f^2 = \mu^2 + hc^2$ (в другой форме: $h = -\mu/a$)

   Получается, независимых первых интегралов всего 5.

Уравнение орбиты

Если $\vec{c} = 0$, тогда из *интеграла площадей* следует $\vec{r} = -r\vec{f}/\mu$, то есть орбита прямолинейная (называется *вертикальная*).
Если $\vec{c} \neq 0$, тогда, умножая *интеграл Лапласа* скалярно на $\vec{r}$, получим

$$c^2 - \mu r = rf\cos\nu \quad \rightarrow \quad r = \frac{c^2/\mu}{1 + (f/\mu)\cos\nu} \quad \rightarrow \quad \boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}.}$$

Здесь введены величины:

1. ν – *истинная аномалия*, угол между $\vec{r}$ и $\vec{f}$ (при $\nu = 0 \to r = r_{min}$ – перицентр)
2. p – *фокальный параметр*: $p = c^2/\mu$ (очевидно, $p \geq 0$)
3. e – *эксцентриситет*: $e = f/\mu$ (очевидно, $e \geq 0$)
   Они обладают свойствами:
4. Величина фокального параметра $p = r$ (при $\nu = \pi/2$) определяет размер орбиты
5. Связь с большей полуосью $p = a(1 - e^2)$ (апогей: $r_a(1 - e) = p$)
6. Связь с меньшей полуосью $p = b\sqrt{1 - e^2}$ (перигей: $r_\pi(1 + e) = p$)
7. *Фокус* конического сечения совпадает с *началом координат* $\to$ первый закон Кеплера
8. Тип сечений определим из уравнения $(e^2 - 1)\mu = hp$ (следует из $f^2 = \mu^2 + hc^2$). При $e < 1$ энергия отрицательна $h < 0$.

Скорость и её компоненты

Разложим вектор скорости на радиальную и трансверсальную компоненты $\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_n$. Из *интеграла площадей* находим трансверсальную компоненты:

$$V_n = \frac{\sqrt{\mu p}}{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e\cos\nu), \quad V_r = \dot{r} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}e\sin\nu.$$

Отсюда или из интеграла энергии следует $V^2 = \frac{2\mu}{r} + h = \frac{\mu}{p}(1 + 2e\cos\nu + e^2)$. Выражение можно выразить через большую полуось: $V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$.
Свойства:

1. В перицентре $V_{max} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 + e)$
2. В апоцентре $V_{min} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}(1 - e)$

Пусть в некий момент времени известны r_0, V_0 (скаляры). Тогда:

1. Эксцентриситет $e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + h\frac{c^2}{\mu^2}} = \sqrt{1 + \left(V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}\right)\frac{c^2}{\mu^2}}$
2. Для *эллипса* $0 \leq e \leq 1$ справедливо $V_0^2 < \sqrt{\mu/r0}$
3. Для *круговой орбиты* $e = 0$ справедливо $V = \sqrt{\mu/r0}$
4. Для *параболической орбиты* $e = 1$ справедливо $V = \sqrt{2\mu/r0}$

Законы Кеплера

1. (1605) Каждая планета Солнечной системы обращается по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. (1602) Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр масс Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий центры Солнца и планеты, описывает равные площади.
3. (1618) Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит планет.

1. Из формулы площадей $S = \frac{c(t_2-t_1)}{2}$, $S = \pi ab$ за оборот $\rightarrow 2\pi ab = cT = \sqrt{p\mu}T$, где T – период обращения.
2. Из аналитической геометрии $b = a\sqrt{1-e^2} \rightarrow$ 3-й закон Кеплера $T\sqrt{\mu} = 2\pi a^{3/2}$.

Качественный анализ свойств эллиптических орбит

1. Преобразуем интеграл энергии $V^2 = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}) = \frac{\mu}{r}(2 - \frac{r}{a})$
2. Эволюция орбиты в результате приложения мгновенного импульса (ΔV по скорости) $\mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_2}) = \mu(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}) + \Delta V$
3. На концах малой полуоси b тело имеет местную круговую скорость $V^2 = \frac{\mu}{a}$, причём $e = |\cos\angle(\vec{r}, \vec{V})|$
4. Из геометрии получим *среднее расстояние спутника* от притягивающего центра $p = a(1-e^2) \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2}(r_\pi + r_a)$
    1. Если усреднять орбиту по равным дугам, то среднее расстояние $-\ a$, а если по равным углам $-\ b$.
5. Затраты энергии на межпланетные перелёты $V^2 \approx -\frac{\mu}{a}$
6. Первая космическая скорость (*circular velocity*): $r = a \rightarrow V_1^2 = \frac{\mu}{r}$, где $r = r_c$ – радиус Земли
7. Вторая космическая скорость (*escape velocity*): $a = \infty \rightarrow V_2^2 = \frac{2\mu}{r}$

Планета	Circular velocity	Escape velocity
Меркурий:	$V_1 = 3.014$ км/с,	$V_2 = 4.263$ км/с
Венера:	$V_1 = 7.316$ км/с,	$V_2 = 10.35$ км/с
Земля:	$V_1 = 7.905$ км/с,	$V_2 = 11.18$ км/с
Марс:	$V_1 = 3.552$ км/с,	$V_2 = 5.023$ км/с
Юпитер:	$V_1 = 42.16$ км/с,	$V_2 = 59.62$ км/с
Сатурн:	$V_1 = 25.12$ км/с,	$V_2 = 35.53$ км/с
Уран:	$V_1 = 15.39$ км/с,	$V_2 = 21.77$ км/с
Нептун:	$V_1 = 16.55$ км/с,	$V_2 = 23.40$ км/с
Плутон:	$V_1 = 0.857$ км/с,	$V_2 = 1.212$ км/с
Луна:	$V_1 = 1.679$ км/с,	$V_2 = 2.376$ км/с

Уравнение Кеплера

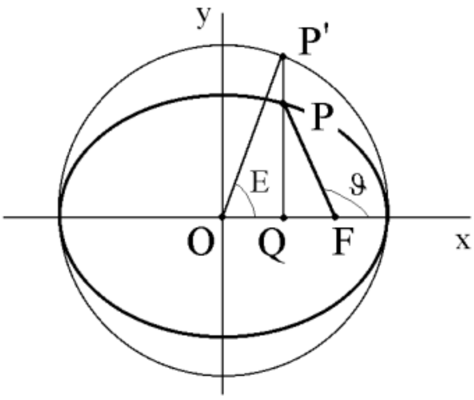
Какая связь между временем и положением тела на орбите (ν) для эллиптического движения?

Интеграл площадей полярной форме $r^2\dot{\nu} = c$ перепишем в виде $dt = \frac{r^2}{c}d\nu$ и проинтегрируем от времени прохождении перицентра τ :

$$\boxed{t - \tau = \frac{1}{c}\int_0^\nu r^2 d\nu = \frac{p^2}{c}\int_0^\nu \frac{d\nu}{(1+e\cos\nu)^2}} \quad (1)$$

Квадратура (1) не даст легко получить положение в заданный момент времени - нужно решать квадратуру.

Введём **эксцентрическую аномалию** E. Тогда $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos E \\ a\sin E \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos E \\ b\sin E \end{bmatrix}$.



Удалённость тела от фокуса: $r = a(1 - e\cos E)$.
Связь истинной и эксцентрической аномалий:

$$\boxed{\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2}}$$

В новой переменной E можно проинтегрировать (1) и получить *уравнение Кеплера:*

$$\boxed{t - \tau = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(E - e\sin E)}$$

Следствие: *период обращения* $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$ (можно получить и из закона постоянства секториальной скорости).

Среднее движение $n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$ – средняя угловая скорость при обороте 2π за T. **Средняя аномалия** $M = n(1 - \tau)$ – угол поворота тела со скоростью n.
Тогда уравнение Кеплера принимает вид:

$$\boxed{E - e\sin E = M}$$

Применение:

1. Для r, ν найти t (элементарно)
2. Для t найти r, ν, то есть найти E по M (приближёнными методами)
   1. Метод итераций: $E_{n+1} = e\sin E_n + M$ (сходится при $e < 1$)
3. Для параболической орбиты используется уравнения Баркера: $\tan\frac{\nu}{2} + \frac{1}{3}\left(\tan\frac{\nu}{2}\right)^3 = M$

<u>Гиперболическое движение</u>

Перицентр r достигается при $\nu = 0 : r_\pi = \frac{p}{1+e}$. При $\nu = \frac{\pi}{2}$ так же $r = p$.

Прицельная дальность – расстояние между асимптотой и фокусом. Она равна мнимой полуоси b.
Бесконечно дальняя точка при $\cos\nu = -\frac{1}{e}$. При бесконечном удалении $V_\infty^2 = h$ (*интеграл энергии*), $bV_\infty = c$ (*интеграл площадей*).

Эллипс:

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}};$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}};$$

$$r = a(1 - e\cos E);$$

$$x = a\cos E, \quad y = b\sin E;$$

$$E - e\sin E = n(t - \tau_\pi);$$

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\mathrm{tg}\frac{E}{2}.$$

Гипербола:

$$a = \frac{p}{e^2-1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}};$$

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}};$$

$$r = a(e\,\mathrm{ch}\,H - 1);$$

$$x = -a\,\mathrm{ch}\,H, \quad y = b\,\mathrm{sh}\,H;$$

$$e\,\mathrm{sh}\,H - H = n(t - \tau_\pi);$$

$$\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,\mathrm{th}\frac{H}{2}.$$