

1. Пусть $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$

2. > Гетероклиническое соединение — от одной неподвижной точки к другой

3. > Сепаративный цикл — замкнутая фигура

4. > Роза из лепестков — составной сепаративный цикл из гомоклинических петель

1. Число лепестков, вообще говоря, счётно (конечно для систем с аналитической правой частью)

5. **Теорема Пуанкаре-Бендиксона:**

1. $\hookrightarrow$ Пусть положительная γ^+ (отрицательная γ^-) полутраектория содержится в компактном подмножестве $S \subset D$

2. > Тогда, если $\Omega(\gamma)$ ($A(\gamma)$) не содержит неподвижных точек, оно является периодической орбитой

6. **Обобщённая теорема Пуанкаре-Бендиксона:**

1. $\hookrightarrow$ Пусть положительная γ^+ (отрицательная γ^-) полутраектория содержится в компактном подмножестве $S \subset D$, причём количество неподвижных точек в S конечно.

2. > Тогда $\Omega(\gamma)$ ($A(\gamma)$) является неподвижной точкой, периодической орбитой или же состоит из конечного числа неподвижных точек, соединяющихся счётным набором гомоклинических и гетероклинических траекторий (причём, если существует гетероклиническое соединение, идущее от одной неподвижной точки к некоторой другой, то оно единственно)

3. Доказательство:

1. $\square$ Доказательство базируется на свойствах, специфичных для ДС на плоскости:

2. Если $\gamma \cap \Omega(\gamma) \neq \emptyset$ ($\gamma \cap A(\gamma) \neq \emptyset$), то γ - неподвижная точка или периодическая орбита (только особые траектории на плоскости устойчивы по Пуассону)

3. Если $\Omega(\gamma)$ не содержит неподвижных точек и содержит периодическую орбиту γ_0 , то $\Omega(\gamma) = \gamma_0$

4. $\hookrightarrow$ Критерий Бендиксона

1. Если $\nabla \vec{f}$ не равна тождественно нулю и не меняет знак в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, то не существует периодических орбит, целиком лежащих в D

5. $\boxtimes$ Для любой жордановой кривой Γ (простой замкнутой кривой), ограничивающей область E , справедлива теорема Грина:

$$\iint_E \nabla \vec{f} dx dy = \oint_{\Gamma} (P dy - Q dx)$$

6. Если кривая-квазипериодическая орбита, то $\oint_{\Gamma} (P dy - Q dx) = \int_0^T (P \dot{y} - Q \dot{x}) dt = \int_0^T (PQ - QP) dt = 0$

7. Значит, $\iint_E \nabla \vec{f} dx dy = 0$, что исключает знакоопределённость $\nabla \vec{f}$ в E ■

7. Из аналогичных рассуждений можно заключить, что знакоопределённость $\nabla \vec{f}$ в односвязной области исключает существование в ней сепарабельных циклов и составных сепаратрисных циклов

8. ? Упражнение: докажите, что если $\nabla \vec{f} \equiv 0$ в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$, то в этой области не может быть предельного цикла (может лишь существовать однопараметрическое семейство периодических орбит).

1. Это, в частности, верно для гамильтоновых ДС на плоскости

9. **Критерий Дюлака:**

1. $\hookrightarrow$ Пусть $\varphi \in C^1(D)$ - гладкая функция в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ (функция Дюлака)

2. > Если $\nabla(\varphi f)$ не равна тождественно нулю и не меняет знак в D , то не существует периодических орбит, целиком лежащих в D .

3. > Если $\nabla(\varphi f)$ не меняет знак в некоторой кольцеобразной области A внутри D , то в этой области существует не более одного предельного цикла

10. **Критерий Бендиксона** — частный случай критерия Дюлака при $\varphi \equiv 1$

11. Если же в области $D \subset \mathbb{R}^2$ периодическая орбита существует, то во внутренней области, которую ограничивает эта орбита, имеется неподвижная точка

1. Проще всего это доказать с помощью теории индексов Пуанкаре

12. > Пусть на жордановой кривой Γ нет неподвижных точек векторного поля $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда **индексом** (Пуанкаре) кривой Γ относительно векторного поля f называется целое число

$$I_f(\Gamma) = \Delta\theta/2\pi,$$

где $\Delta\theta$ — изменение угла между векторов $f = [P, Q]$ и осью Ox за один оборот вдоль Γ против часовой стрелки

$$\theta(x, y) = \arctan \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} :$$

$$I_f(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d \left(\arctan \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \right) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \frac{PdQ - QdP}{P^2 + Q^2}$$

1. Индексом Пуанкаре изолированной неподвижной точки называется индекс жордановой кривой, охватывающей только эту з всех неподвижных точек

13. ? Упражнение: пусть Γ – окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Чем равен её индекс относительно векторных полей: (картинки в файлике)

1. $f = [x, y] \quad I_z(\Gamma) = 1$
2. $f = [-x, -y] \quad I_z(\Gamma) = 1$
3. $f = [-y, x] \quad I_z(\Gamma) = 1$
4. $f = [x, -y] \quad I_z(\Gamma) = 1$

14. Если разбить жорданову кривую Γ на две $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, то для $\forall$ векторного поля

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow I_f(\Gamma) = I_f(\Gamma_1) + I_f(\Gamma_2)$$

15. Если внутри жордановой кривой нет неподвижных точек, то $I_f(\Gamma) = 0$

16. Теорема:

1. ↪ Если жорданова кривая Γ охватывает n неподвижных точек, то её индекс равен сумме индексов этих точек:

$$I_z(\Gamma) = \sum_{i=1}^n I_f(x_i), \quad f(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

2. > Если индекс периодической орбиты равен 1, то внутри содержится хотя бы 1 неподвижная точка (если из конечное число, то сумма их индексов равна 1)

17. Теорема:

1. ↪ Индекс невырожденных неподвижных точек не изменяется, если перейти к линеаризованному векторному полю
2. > Для (топологического) седла индекс равен -1, для остальных типов невырожденных неподвижных точек индекс равен 1
3. > Если у ДС на плоскости правая часть аналитична, то индекс любой изолированной неподвижной точки равен $1 + \frac{e-h}{2}$, где e, h - числе эллиптических и гиперболических секторов

18. ☹ Пример: Для ДС на плоскости индекс неподвижной точки типа седло-узел равен нулю

19. Теорему Пуанкаре-Бендиксона и теорию индексов можно обобщить на случай компактных двумерных гладких многообразий

20. Теорема:

1. ↪ Пусть M - компактное двумерное C^2 -гладкое многообразие
2. > Пусть поток задаваемый векторным полем $f \in C^1(M)$, имеет конечное число неподвижных точек
3. > Тогда если все устойчивые по Пуассону (в одном направлении) траектории тривиальны (неподвижные точки и периодические орбиты), то ω -предельное множество любой траектории является неподвижной точкой, периодической орбитой или же состоит из конечного числа неподвижных точек, соединяющихся счётным набором гомоклинических и гетероклинических траекторий
4. > Индекс такого многообразия равен сумме индексов неподвижных точек (определяются по локальным картам). Он не зависит от выбора конкретного векторного поля и равен эйлеровой характеристике поверхности: $I_z(M) = X(M)$ - теорема об индексе Пуанкаре