

1. > Задача Коши для систем ОДУ

1. Рассматриваем задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Если порядок уравнения/системы уравнений выше, то приводится к аналогичной форме:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_2 \\ \dot{u}_2 = u_3 \\ \dots \\ \dot{u}_m = g(t, u_1 \dots u_m) \end{cases}$$

2. > Введём в расчётной области $t \in [0, T]$ узлы расчётной сетки $\{t_n = n\tau, n = 0, \dots, N\}$, в которых вычисляется искомое решение. Совокупность узлов называется *расчётной сеткой*, τ – *шагом интегрирования*. В реальных случаях применяются и неравномерные сетки.

3. Введём сеточную функцию y , определённую в узлах сетки, приближающую искомую функцию U^τ – проекцию точного решения искомой задачи на сетку.

4. Введём операторное обозначение дифференциальной задачи

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} - f(t, u), & t > 0; \\ u(0), & t = 0; \end{cases} = L(u) = F = \begin{cases} 0, & t > 0; \\ u_0, & t = 0; \end{cases}$$

и аппроксимирующей разностной задачи $L_\tau(y) = F_\tau$.

5. > Решение y задачи $L_\tau(y) = F_\tau$ сходится при $\tau \rightarrow 0$ к решению исходной задачи $L(u) = F$, если $\|y - U^\tau\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

6. > Если же имеет место оценка $\|y - U^\tau\| \leq C\tau^p$, причём C не зависит от сеточных параметров, то имеет место сходимость порядка p .

7. > Задача $L_\tau(y) = F_\tau$ аппроксимирует задачу $L(u) = F$ на её решении, если *невязка* $\|r_\tau\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$, где $r_\tau = L_\tau(U^\tau) - F_\tau$. При этом если имеет место оценка $\|r_\tau\| \leq C_1\tau^q$, причём C_1 не зависит от сеточных параметров, то имеет место аппроксимация порядка q .

8. > Задача $L_\tau(y) = F_\tau$ устойчива, если две близкие возмущённые задачи одновременно однозначно разрешимы и из $L_\tau(y_1) - F_\tau = \xi_\tau$ и $L_\tau(y_2) - F_\tau = \eta_\tau$ следует $\|y_2 - y_1\| \geq C_2(\|\xi_\tau\| + \|\eta_\tau\|)$, C_2 не зависит от τ .

9. > Разностная схема с линейным оператором L_τ называется устойчивой, если разностная задача $L_\tau(y) = F_\tau$ разрешима при $\forall F_\tau$ и выполнена оценка $\|y\| \leq C\|F_\tau\|$, C не зависит от сеточных параметров.

10. *Теорема (Филлипова-Рябенского-Лакса)*: решение задачи $L_\tau(y) = F_\tau$ сходится к решению исходной задачи $L(u) = F$, если задача $L_\tau(y) = F_\tau$ устойчива и аппроксимирует задачу $L(u) = F$ на её решении; если аппроксимация имеет порядок p , то и сходимость имеет порядок p .

2. > Рунге-Кутты

1. > S-стадийный одношаговый *явный* метод для решения задачи Коши:

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, y_n), \\ k_2 = f(t_n + c_2\tau, y_n + \tau a_{21}k_1), \\ k_3 = f(t_n + c_3\tau, y_n + \tau(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)), \\ \dots \\ y_{n+1} = y_n + \tau(b_1k_1 + \dots + b_s k_s) \end{cases}$$

2. *Замечание:* коэффициенты можно узнать из таблицы Бутчера
3. *Замечание:* Кутты предложил $c_n = \sum_j a_{nj}$, что упрощает вывод порядка аппроксимации
4. Для задачи $\frac{du(t)}{dt} = f(t, u)$, $u(0) = u_0$. представим дискретный аналог:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = F(t_n, y^n), \quad y^0 = u_0,$$

где $F(t_n, y^n)$ – функция приращения Рунге-Кутты.

5. *Лемма:* пусть C – постоянная Липшица для функции правых частей $f(t, u)$, тогда функция приращения $F(t_n, y^n)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_n) - F(t, v_n)\| \leq C_2 \|u_n - v_n\|,$$

где $C_2 = C(\sum_i |c_i| + \tau C \sum_{i,j} |c_i a_{ij}| + \tau^2 C^2 \sum_{i,j,k} |c_i a_{ij} a_{jk}| + \dots)$. Для правильных методов Рунге-Кутты $C_2 \approx Ce^{C\tau}$.

6. *Теорема (устойчивость методов Рунге-Кутты):* пусть правая часть системы ОДУ $f(t, u)$ удовлетворяет условиям Липшица по аргументу u с постоянной C :
 $\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq C \|u - v\|$ (не зависит от сеточного параметра). Пусть также $C_2 \tau \ll 1$, C_2 оценено по лемме. Тогда метод Рунге-Кутты устойчив, и имеет место оценка

$$\|y_n - v_n\| \leq e^{C_2 T} \|y_0 - v_0\| + \frac{2\varepsilon}{C_2} e^{C_2 T},$$

где ε – максимальная ошибка округления ЭВМ, y_n – точное сеточное решение, v_n – решение возмущённой задачи, T – длина отрезка интегрирования.

7. *Замечание:* этот вывод не зависит от порядка метода Рунге-Кутты.
8. $\triangleright$ Пусть матрица $A(u) = \frac{1}{2}(f_u(u) + f_u^*(u))$ строго отрицательная, что значит $(A(u)\xi, \xi) \leq -a(\xi, \xi)$, $\forall \xi, u, a > 0$. Траектория, в окрестности которой это выполняется, называется *устойчивой*.
9. *Замечание:* тогда при интегрировании *правильным* методом Рунге-Кутты порядка аппроксимации k погрешность приближённого решения есть $O(\tau^k)$ при $\forall t > 0$ при выполнении
10. *Замечание:* при численном интегрировании *устойчивой траектории* погрешность метода $O(\tau^k)$
11. $\triangleright$ Пусть теперь $A(y, y) \leq 0 \forall y$. Такие траектория называется *неустойчивой* (нейтральными).
12. *Замечание:* при численном интегрировании нейтральной системы методом Рунге-Кутты порядка $k \geq 2$ точность метода падает на порядок при $t = O(1/\tau)$.

3. $\triangleright$ Метод стрельбы

1. *Рассматриваем* краевую задачу

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}), \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = Y_0, \quad y(1) = Y_1. \quad (1)$$

Это нелинейная задача, если функция $f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$ нелинейна хотя бы по одному аргументу из $\{y, \dots, y^{(n-1)}\}$.

2. $\triangleright$ Метод стрельбы рассматривается для решения краевой задачи степени 2. Он базируется на том, что имеется способ численного решения задачи Коши:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad 0 < x \leq 1, \quad y(0) = Y_0, \quad y'(0) = \alpha.$$

3. При фиксированном Y_0 решение зависит от *пристрелочного параметра* $y = y(x, \alpha)$. Далее, считаем эту зависимость непрерывной, хотя это не всегда так. В конечной точке $y(x, \alpha)|_{x=1} = y(\alpha)$. Хотим найти такой α^* , чтобы $y(1, \alpha^*) = Y_1$. Тогда метод сводится к

уравнению вида

$$F(\alpha) = y(1, \alpha) - Y_1 = 0.$$

Для его решения можно использовать методы решения нелинейных уравнений. Например, метод Ньютона:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}.$$

Замечание: для вычисления $F'(\alpha_n) = \frac{F(\alpha_n+h) - F(\alpha_n)}{h}$ нужно считать $h > 1$ задачи Коши, что не есть ок из-за некорректности задачи численного дифференцирования. Другой способ:

$$y'' = f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha))$$

$$\frac{y''}{\alpha}(x, \alpha) = \frac{1}{y} f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{y}{\alpha} + \frac{1}{y'} f(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)) \frac{y'}{\alpha},$$

и, если решение достаточно гладкое, и можно поменять порядок дифференцирования, то

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)'' = \frac{f}{y} \frac{y}{\alpha} + \frac{f}{y} \frac{d}{dx} \frac{y}{\alpha}$$

$$[\text{замена}] : u = \frac{y}{\alpha}, \quad u'' = \frac{f}{y} u + \frac{f}{y'} u', \quad u(0) = 0, u'(0) = 1$$

4. > Метод квазилинеаризации

1. Решаем нелинейную краевую задачу

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = Y_L, \quad y(b) = Y \quad (2).$$

Ищем решение в виде $y(x) = y_0(x) + (x)$, где $y_0(x)$ удовлетворяет граничным условиям.

Заметим, что $y''(x) = y_0''(x) + ''(x)$. Линеаризируем (2) относительно $y_0(x)$:

$$f(x, y_0 + , y_0' + ') = f(x, y_0, y_0') + \frac{f(x, y_0, y_0')}{y} + \frac{f(x, y_0, y_0')}{y'} + O((^2 + (')^2).$$

Оставим только линейные члены, подставим в (2):

$$''(x) = p(x)'(x) + q(x)(x) + \varphi(x),$$

$$(a) = (b) = 0, \quad x \in [a, b],$$

где $p(x) = \frac{f}{y_0}$, $q(x) = \frac{f}{y_0}$, $\varphi(x) = f - y_0''(x)$. Решив краевую задачу, в качестве приближения следует брать

$$y_1 = y_0 + , \quad y = y_1 + _1 \text{ и т. д.}$$

5. ⇨ Список методов

2. > Методы решения диффузов

1. Метод Бубнова — Галёркина https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Галёркина

1. Метод приближённого решения краевой задачи для дифференциального уравнения $L[u] = f(x)$, где L может содержать частные или полные производные искомой функции.

3. > Методы решения оптимизационных задач

1. Градиентные методы

1. Ньютона

2. Гаусса

3. Левенберга

4. Марквардта

5. Крылова

2. Многокритериальная оптимизация <https://ru.wikipedia.org/wiki/>

[Многокритериальная оптимизация](#)