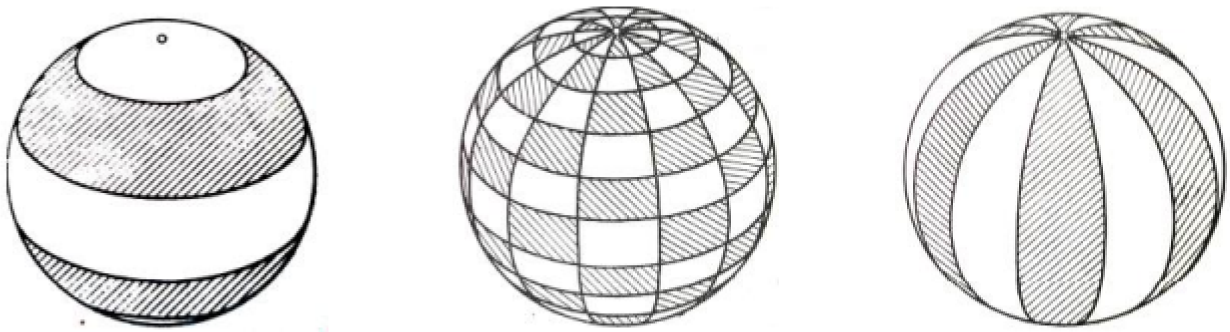
Влияние несферичности Земли на движение КА

1. <u>Модели гравитационного поля Земли</u>
    1. Потенциал гравитационного поля Земли

       $$U = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{ev}}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} J_{nm}\left(\frac{R_{ev}}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\cos m(\lambda - \lambda_{nm})\right]$$

        1. r - геоцентрическое расстояние
        2. λ - географическая долгота
        3. φ - геоцентрическая широта
        4. R_{ev} - средний радиус (экваториальный)
        5. P_n^m - присоединенная функция Лежандра степени n и порядка m
        6. P_n - полином Лежандра порядка n
        7. λ_{nm} - фазовый угол, связанный с гармониками:

           $$J_{nm}^2 = C_{nm}^2 + S_{nm}^2, \quad \lambda_{nm} = \frac{1}{m}\arctan\frac{S_{nm}}{C_{nm}}$$

        8. J_n - зональные гармонические коэффициенты
        9. C_{nm}, S_{nm} - тессеральные ($n \neq m$) / секторальные ($n = m$) гармонические коэффициенты
        10. 
    2. Сила на материальную точку $\boldsymbol{F} = m\nabla U$
    3. Зональные гармоники
        1. Широтных зон $(n+1)$
        2. Полином Лежандра $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n$
            1. $P_0(x) = 1$
            2. $P_1(x) = x$
            3. $P_2(x) = (3x^2-1)/2$
        3. $J_2 = 1.082 \times 10^{-3}$
        4. $J_3 = -2.53 \times 10^{-6}$
        5. $J_4 = -1.61 \times 10^{-6}$
    4. Тессеральные гармоники

       6. Широты зон $(n-m)$
       7. Меридианы зон $2m$
       8. Присоединённые многочлены Лежандра $P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$
    5. Секторальные гармоники
        1. Главная гармоника J_{22}, и $\lambda_{22} = -14.7^\circ$
2. <u>Гравитационное поле несферичной Земли</u>

   6. Гравитационное ускорение на материальную точку P: $\frac{\boldsymbol{F}}{m_0} = \frac{\partial U}{\partial x} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{R}$

7. Допустим, $\boldsymbol{\rho}$ - вектор до элементарной массы dm, ...
8. Потенциал точки P в поле тяжести Земли (приближение Мак-Куллага):

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\gamma}{2r^3}(A_E + B_E + C_E - 3J_p),$$

где A_E, B_E, C_E - главные центральные моменты инерции Земли, J_p - момент инерции вокруг OP

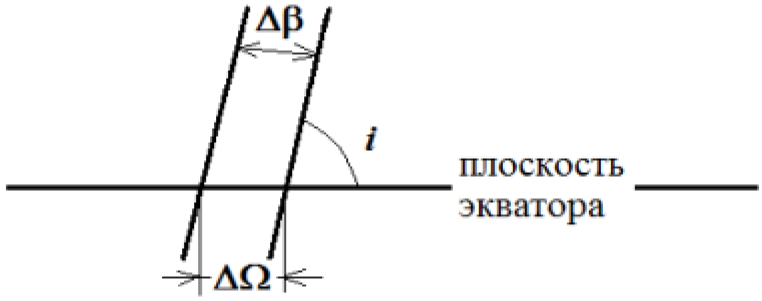
3. Вычисление возмущающего ускорения
   1. Потенциал Земли в первом приближении (ψ - географическая широта):

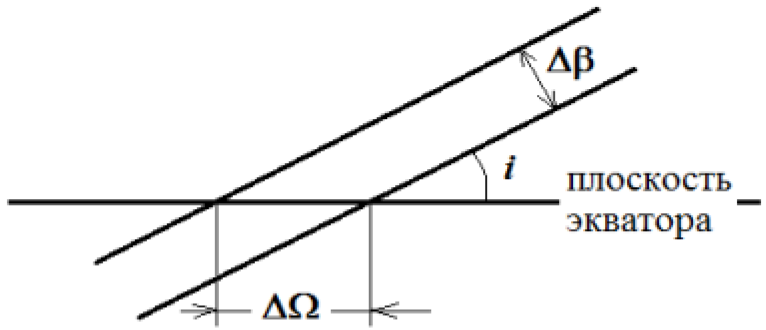
$$U = \frac{\mu}{r} - \frac{\varepsilon}{3r^3}(3\sin^2\psi - 1), \quad \varepsilon = \frac{3}{2}\mu R_{ev}^2 J_2$$

   2. Радиальное ускорение $g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^4}(3\sin^2\psi - 1)$
      1. $S = \frac{\varepsilon}{r^4}(3\sin^2\psi - 1) \to S = \frac{\varepsilon}{r^4}(3\sin^2 u \sin^2 i - 1)$
   3. Меридиональное ускорение $g_m = \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{d\psi}{ds} = -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin 2\psi$ (вдоль плоскости меридиана $\perp \boldsymbol{r}$) ($ds = r d\psi$)
      1. Широтная составляющая равна нулю из-за симметрии вокруг вращения Земли
      2. $T = g_m \cos\alpha = -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin 2u \sin^2 i$
      3. $W = g_m \sin\alpha = -\frac{\varepsilon}{r^4}\sin 2i \sin u$
4. Эволюция экваториальной орбиты в полне несферичной Земли
   4. Если орбита экваториальная, то $S = \frac{\varepsilon}{r^4},\ \ T = 0,\ \ W = 0$
   5. За виток $\Delta\Omega = \Delta i = \Delta p = 0$
   6. После вычислений $\to \Delta e = 0$
   7. То есть плоскость движения, форма и размеры орбиты не изменяются
   8. После вычислений $\to \Delta\omega = (2\pi\varepsilon)/(\mu p^2)$ - изменение константы Лапласа. Орбита вращается внутри своей плоскости
5. Прецессия наклонной орбиты в поле несферичной Земли
   1. За виток

$$\Delta i = \Delta p = \Delta e = 0, \quad \Delta\Omega = \frac{\varepsilon\cos i}{\mu p^2}2\pi, \quad \Delta\omega = \frac{\varepsilon}{\mu p^2}(4 - 5\sin^2 i)\pi$$

   2. Форма и размеры эллипса не меняются
   3. Плоскость орбиты будет поворачиваться с сохранением наклонения
   4. При $i = \pi/2$ (полярные орбиты) прецессии не будет $\Delta\Omega = 0$
   5. Если поменять прецессию приращением $\Delta\beta$, то очевидно $\Delta\beta = \Delta\Omega\sin i = -\frac{\pi\varepsilon}{\mu p^2}\sin 2i$





6.

7. При $i = \pi/4$ приращение $\Delta\beta$ принимает максимальное значение

6. <u>Специальные орбиты</u>

8. Для большинства российских КА прецессия 4° в сутки

9. Орбита Молнии

1. Для наклонения $4 - 5\sin^2 i = 0$ (63.4°) аргумент перицентра не меняется $\Delta\omega = 0$
2. $\omega = -90^\circ$, период обращения 12 часов
3. Большая часть времени в апогее на высоте 40 000 км
4. Для покрытия достаточно 3 аппаратов, 4 использовалось

10. Солнечно-синхронные орбиты (гелиосинхронные)

1. Орбита прецессирует в восточном направлении 360° в год
2. Для высоты 600-800 км требуемое наклонение $\approx 98^\circ$

11. Геосинхронные орбиты

1. Большая полуось $a = \left(\frac{\mu T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42\ \ 164\ \ \text{км}$ (для сидерического периода 23ч 56мин 4сек)
2. Геостационар - круговая орбита

1. Полярное сжатие J_2 не приводит к ассиметрии
2. Вторая тессеральная гармоника J_{22} - эллиптичность в экваторе (200 метров). Вдоль этих "нашлёпок" - устойчивые положения равновесия (75° и 255° восточной долготы) - направление гравитационной долины (*gravitational valley*). Одна точка над Атлантическим океаном, вторая над Тихим океаном.
3. Более 300 спутников распределены ~ равномерно по орбите

12. *Международный союз электросвязи* распределяет точки стояния и радиочастоты между спутниками