

Типы бифуркаций.

1. Теперь системы зависят от параметров $\dot{x} = f(x, \mu)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ (m -параметрическая система)

2. > **Точка бифуркации** – значение μ_0 в системе, для которого $f(x, \mu_0)$ в компакте D не является грубой

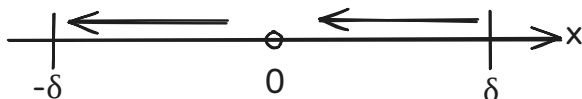
3. ☉ Пример: $\dot{x} = \mu - x^2$, $x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, x \in [-\delta, \delta]$

1. Ищем положения равновесия (ПР) в зависимости от μ

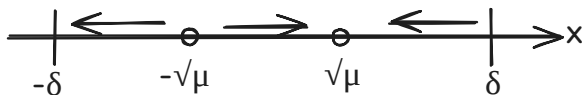
1. $\mu < 0 \rightarrow$ ПР нет



2. $\mu = 0 \rightarrow$ 1 ПР: $x = 0$



3. $\mu > 0 \rightarrow$ 2 ПР: $x = \pm\sqrt{\mu}$



2. Исследуем ПР на гиперболичность

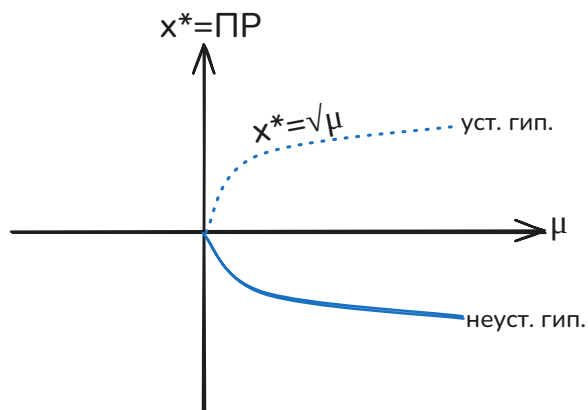
1. $\mu < 0 \rightarrow -$

2. $\mu = 0 \rightarrow$ ПР: 1 не гиперболическое

3. $\mu > 0 \rightarrow$ ПР: 2 гиперболических

3. $\mu = 0$ - точка бифуркации

4. > Бифуркационная диаграмма: **седлоузловая бифуркация**



4. ☉ Пример: $\dot{x} = x(\mu - x)$

1. $\mu < 0 \rightarrow x^* = [0, \mu]$

1. 2 ПР: гиперболические

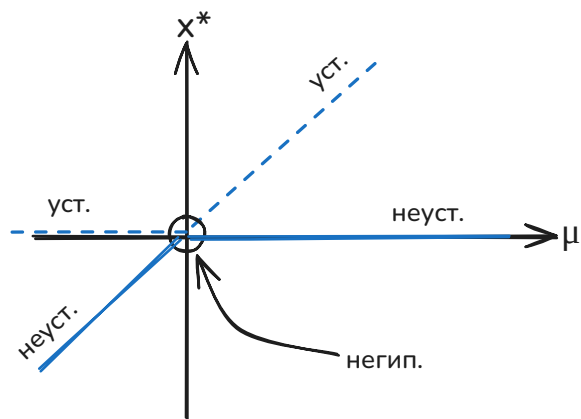
2. $\mu = 0 \rightarrow x^* = [0]$

1. 1 ПР: негиперболические

3. $\mu > 0 \rightarrow x^* = [0, \mu]$

1. 2 ПР: гиперболические

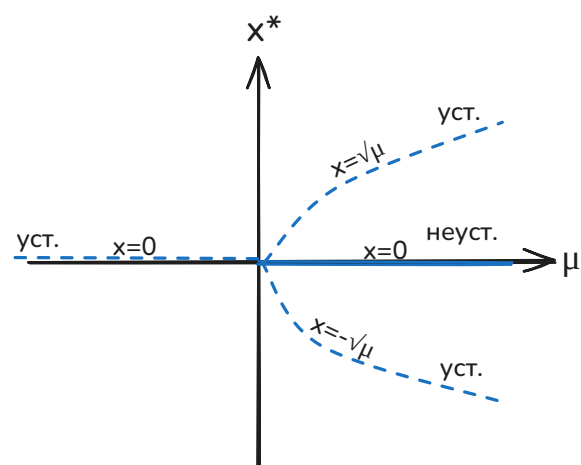
4. > Бифуркационная диаграмма: **транскритическая бифуркация**



5. ☉ Пример: $\dot{x} = x(\mu - x^3)$

1. $\mu < 0 \rightarrow x^* = [0]$
 1. 1 ПР: гиперболическое
2. $\mu = 0 \rightarrow x^* = [0]$
 1. 1 ПР: негиперболические
3. $\mu > 0 \rightarrow x^* = [-\sqrt{\mu}, 0, \sqrt{\mu}]$
 1. 3 ПР: 1 негиперболическое, 2 гиперболические

4. > Бифуркационная диаграмма: **вилка**



6. Теорема Сотомайера для седло-узловой бифуркации:

1. ↳ Пусть для системы

$$\dot{x} = f(x, \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

есть положение равновесия при $\mu_0 : f(x_0, \mu_0) = 0$.

2. > Матрица $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0)$ имеет простое (кратности 1) собственное число с правым собственным вектором $\vec{u}$ и левым собственным вектором $\vec{w}$
3. > Пусть A имеет k собственных значений с $Re(\lambda) < 0$, и $(n - k - 1)$ с $Re(\lambda) > 0$
4. > Пусть

$$\begin{cases} w^T \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) \neq 0 \\ w^T \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(f(x_0, \mu_0)(u, u)) = w^T \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x_0, \mu_0)}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j \neq 0 \end{cases}$$

5. > Тогда:

1. > $\exists$ гладкая кривая из ПР в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, проходящая через (x_0, μ_0)
2. > Нет ПР около x_0 при $\mu < \mu_0$ (или $\mu > \mu_0$) и $\exists$ 2 ПР около x_0 при $\mu > \mu_0$ (или $\mu < \mu_0$)
3. > 2 ПР около x_0 гиперболические, система испытывает седло-узловую бифуркацию

7. Теорема Сотомайера для транскритической бифуркации:

1. ↳ $\| - \| - \|$

2. > Пусть

$$\begin{cases} w^T \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0 \\ w^T \frac{\partial^2 f}{\partial \mu \partial x}(x_0, \mu_0)u \neq 0 \\ w^T \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0, \mu_0)(u, u) \neq 0 \end{cases}$$

3. > Тогда слева 2 ПР, справа 2 ПР

8. Теорема Сотомайера для бифуркации типа "вилка":

1. $\hookrightarrow || - || - ||$

2. > Пусть

$$\begin{cases} w^T \frac{\partial f}{\partial \mu}(x_0, \mu_0) = 0 \\ w^T \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, \mu_0)u = 0 \\ w^T \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x_0, \mu_0)(u, u) \neq 0 \\ \dots \end{cases}$$

3. > Тогда слева 2 ПР, справа 2 ПР

Развёртка. Универсальная развёртка негрубой ДС.

1. Пусть есть структурно неустойчивая динамическая система:

$$\dot{x} = \vec{f}_0(x)$$

1. То есть $\exists$ система

$$\dot{x} = \vec{f}(x) + \vec{g}(x), \quad |\vec{g}(x)| \leq \varepsilon, \quad |\vec{g}'_x(x)| \leq \varepsilon,$$

у которой фазовый портрет другой

2. Будем считать ДС точкой: $f_0(x)$ – элемент в пространстве C^1 -функций на D

3. Можно ли параметризовать все варианты изменения ДС конечным вариантом?

2. Рассмотрим одномерный случай $\dot{x} = f(x)$: $f(0) = 0$

1. Можем разложить правую часть по Тейлору: $f(x) \rightarrow a_k x^k + \dots$, $a_k \neq 0$, $k = 2, \infty$

1. $k \neq 1$, потому что иначе не будет структурной устойчивости (гиперболическая система)

2. Сделаем замену времени: $d\tau = -a_k dt$

1. Тогда $\dot{x}_\tau = -x^k + \dots = -x^k + \eta g(\eta, x)$, g – гладкая $g \in C^1(D)$

2. Есть некая константа η , которая близка к 0

3. Для такой системы теорема:

3. Теорема:

1. $\hookrightarrow \forall g \in C^1(D) \rightarrow \exists$ замена $x = y + \eta h(x)$, $h \in C^1(D)$ и функция $v(\eta, x) : v(0, 0) \neq 0$, что

$$u(\eta, x)(-x^k + \eta g(\eta, x)) = \mu_1(\eta) + \mu_2(\eta)y + \mu_{k-1}(\eta)y^{k-2} + y^k$$

2. Замечание: $x = y + \eta h(x)$ – гомеоморфизм, значит, все ПР 1-й системы – ПР 2-й системы

3. Замечание: Производную ДС можно в окрестности привести к некоторому виду, где $(k-1)$ параметров

4. > Развёртка $f(x, \mu)$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ гладкого поля $f_0(x)$ – гладкое поле: $f(x, \mu_0) = f_0(x)$

1. Здесь $\dot{x} = f_0(x)$, $f_0(x) \in C^1(D)$

5. > Универсальная развёртка $f^*(x, \mu)$: любая другая развёртка топологически эквивалентна подсемейству из $f^*(x, \mu)$

1. $\boxtimes$ Любая система $\dot{x} = f(x)$ топологически эквивалентна $x'_\tau = -x^k + \dots$, где мы отбрасываем в правой части: $x'_\tau = -x^k$. КоРоЧе, $y' = \mu_1(\eta) + \mu_2(\eta)y + \mu_{k-1}(\eta)y^{k-2} + y^k$ – универсальная развёртка

6. $\odot$ Пример: $\dot{x} = \mu - x^2$ – развёртка структурно неустойчивой ДС $\dot{x} = -x^2$

1. Докажем, что такая развёртка – универсальная

1. $\square$ Разложим: $\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + \dots - x^2$

2. Оставляем $\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x + (\mu_3 - 1)x^2$

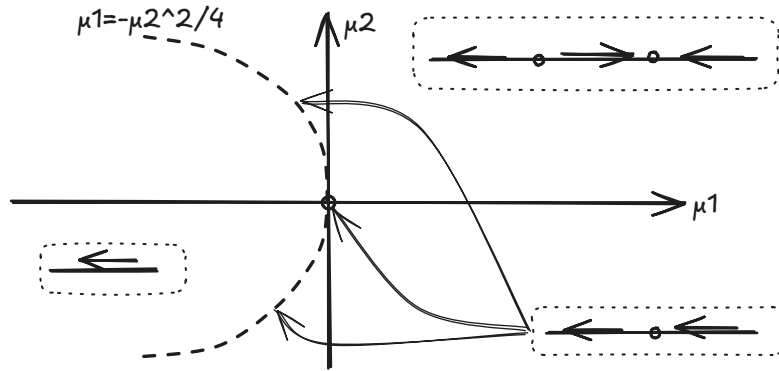
3. Гомеоморфизмом сводим к $\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x - x^2$ (вроде, заменой $\tilde{x} = kx$)

4. А ещё одним к $\dot{x} = \mu_1 - x^2$ (вроде, заменой $y = x + \mu/2 \rightarrow \dot{y} = \mu - y^2, \mu = \mu_1 + \mu_2^2/4$) ■

7. $\odot$ Пример: $\dot{x} = -x^2$

1. Развёртка $\dot{x} = \mu x - x^2$ универсальной уже не будет

2. Для развёртки $\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x - x^2$

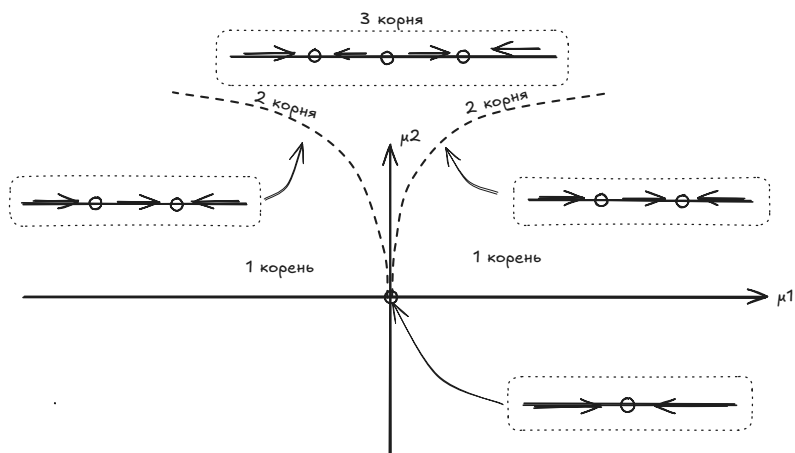


1. Как мы получили $\mu_1 = -\mu_2^2/4$ - не знаю (че то решили)

8. ☉ Пример: $\dot{x} = -x^3$

1. $\dot{x} = \mu x - x^3$ - не универсальная развёртка; надо добавить параметр:

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 x - x^3$$



2. $\begin{cases} \mu_1^2 \geq 4\mu_2^3/27 \\ \mu_2 > 0 \end{cases}$ или $\mu_2 \leq 0 \rightarrow 1$ устойчивое ПР

3. $\begin{cases} \mu_1^2 < 4\mu_2^3/27 \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \rightarrow 3$ ПР: посередине неустойчивое, по бокам устойчивое

4. $\begin{cases} \mu_1 = \sqrt{4\mu_2^3/27} \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \rightarrow 2$ ПР: слева устойчивое, справа гиперболическое

5. $\begin{cases} \mu_1 = -\sqrt{4\mu_2^3/27} \\ \mu_2 > 0 \end{cases} \rightarrow 2$ ПР: слева гиперболическое, справа устойчивое

6. Замечание: Бифуркация типа вилки: $\mu_1 = 0$, μ_2 меняется

7. Замечание: На кривой $\mu_1 = \pm\sqrt{4\mu_2^3/27}$ структурно неустойчивые ДС, в остальном пространстве (μ_1, μ_2) - структурно устойчивые

Бифуркации периодических решений

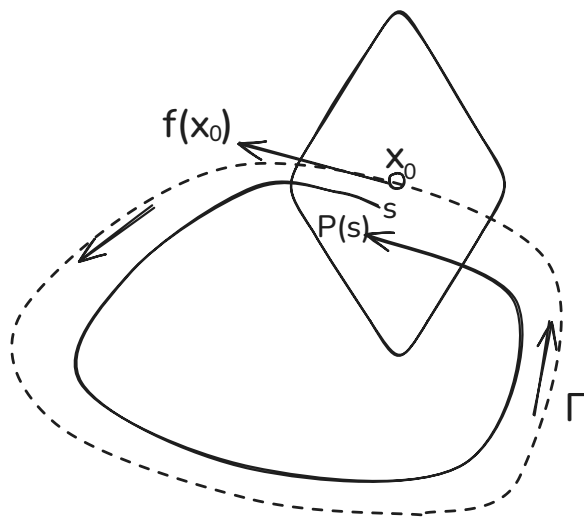
1. Рассматриваем систему

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

причём $x_p(t)$ – периодическое решение с периодом T и гравой Γ в фазовом пространстве

2. Далее, S – гиперповерхность, перпендикулярная к Γ в точке $x_0 \in \Gamma$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0)^T f(x_0) = 0\}$$



3. Теорема:

1. Пусть E – открытое в $\mathbb{R}^n$ множество и $f \in C^1(E)$. Пусть $\varphi_t(x)$ – периодическое решение с периодом T , и его кривая Γ лежит в E , S – гиперповерхность в Γ в точке $x_0 \in \Gamma$. Тогда $\exists \delta > 0$, $\exists \tau(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция в δ -окрестности $U_\delta(x) \cap S$, причём

$$\tau(x_0) = \Gamma, \quad \varphi_{\tau(x)}(x) \in S \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \cap S$$

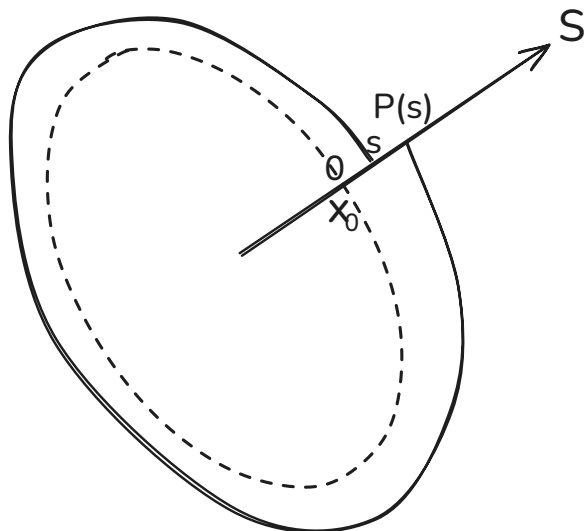
4. Пусть $\Gamma, S, \delta, \tau(x)$ определены в Теореме. Тогда отображение Пуанкаре – гладкая функция

$$P(x) \doteq \varphi_{\tau(x)}(x), \quad x \in U_\delta(x_0) \cap S$$

1. x_0 – неподвижная точка отображения Пуанкаре, если $P(x_0) = x_0$

5. Пример: двумерная система

1. S – прямая, которую пересекает периодическая траектория в $\vec{x}_0$. Введём координату s – пересечение прямой S , и отображение Пуанкаре $P(s)$



2. $d(s) = P(s) - s$ – функция смещения
3. $d'(s) = P'(s) - 1$
 1. $P'(0) < 1 \rightarrow$ устойчивое
 2. $P'(0) > 1 \rightarrow$ неустойчивое
4. $d(s) \approx d'(s)s$
5. Если $d'(0) < 0$, то $x_p(t)$ – устойчивое
6. Если $d'(0) > 0$, то $x_p(t)$ – неустойчивое

6. Теорема:

1. Пусть E – открытое множество в $\mathbb{R}^2$, $f \in C^1(E)$, $x_p(t)$ – траектория периодического решения с периодом T . Тогда

$$P'(0) = \exp \int_0^T \operatorname{div} f(x_p(t)) dt, \quad \operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

7.  Пример:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) = f_1 \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) = f_2 \end{cases}$$

1. Существует периодическое решение $x_p(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ (как его найти – отдельный разговор; можно перейти в полярную систему координат)

2. Применим теорему:

$$1. P'(0) = \exp \int_0^{2\pi} \operatorname{div} f(x_p(t)) dt = \exp \int_0^{2\pi} (1 - 3x^2 - y^2 + 1 - x^2 - 3y^2) \big|_{x=\cos t, y=\sin t} dt =$$

$$2. = \exp \int_0^{2\pi} (2 - 4(\cos^2 t + \sin^2 t)) dt = \exp \int_0^{2\pi} (-2) dt = \exp(-4\pi) < 1$$

3. Значит, цикл $x_p(t)$ устойчивый

8. > Пусть $P(s)$ – отображение Пуанкаре для гладкой непрерывно дифференцируемой Γ плоской системы и $d(s) = P(s) - s$. Тогда если

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0, \quad d^{(k)}(0) \neq 0,$$

то Γ называется **кратным предельным циклом** кратности k

1. Замечание: гладкое = непрерывно дифференцируемое (мы решили так)

2. Если k нечётно, то:

1. Если $d^{(k)}(0) < 0$, то Γ – устойчивый цикл

2. Если $d^{(k)}(0) > 0$, то Γ – неустойчивый цикл

3. Если k чётно, то Γ – негиперболическое периодическое решение (цикл)